

بسمه تعالی

آیه ۳ سوره طلاق:

وَيَرْزُقُهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ وَمَنْ يَتَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ فَهُوَ حَسْبُهُ إِنَّ اللَّهَ بَالِغُ أَمْرِهِ قَدْ جَعَلَ اللَّهُ لِكُلِّ شَيْءٍ قَدْرًا

و از جایی که گمان نبرد به او روزی عطا کند، و هر که بر خدا توکل کند خدا او را کفایت خواهد کرد که خدا امرش را نافذ و روان می‌سازد و بر هر چیز قدر و اندازه‌ای مقرر داشته است.

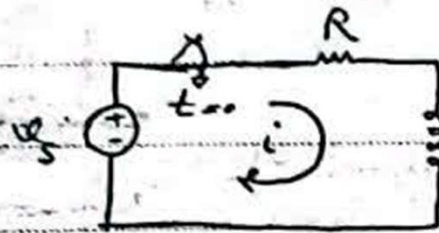
فصل دوم

مدارات مرتبه اول RC و RL



مدارهای مرتبه اول (RL, RC)

بنویشتن KVL و KCL در مدارهای RL و RC یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌دهیم. همین‌طور این مدارها را مدارهای مرتبه اول می‌نامند. به عنوان مثال مدار زیر را در نظر بگیرید:



$$t \geq 0: KVL: -U_s + Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{U_s}{L}} \quad \text{معادله دیفرانسیل مرتبه اول}$$



یادآوری: حل معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی یک با ضرایب ثابت

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{I}x = k \quad \text{ثابت } k$$

الف) جواب همگن (تخلیه):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{I}x = 0 \rightarrow x_h = Ae^{st}$$

$$\text{ب) قرار دادن در معادله: } \frac{d}{dt}(Ae^{st}) + \frac{1}{I}(Ae^{st}) = 0$$

$$\Rightarrow Ae^{st}\left(s + \frac{1}{I}\right) = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{I}$$

$$x_h = Ae^{-\frac{t}{I}}$$

$$x_p = k_f \quad \text{ثابت } k_f \quad \text{جواب خصوصی}$$

$$\frac{d}{dt}(k_f) + \frac{1}{I}k_f = k \Rightarrow k_f = kI$$

پایان جواب کلی: $x(t) = x_p + x_h = A e^{-t/\tau} + k\tau$

- برای پیدا کردن ضریب مجهول A از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم $(x(0))$

$$t=0 \Rightarrow x(0) = A e^0 + k\tau \Rightarrow A = x(0) - k\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = [x(0) - k\tau] e^{-t/\tau} + k\tau$$

چون $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = k\tau$

پایان τ علامت زمان و $x(\infty)$ نشان می‌دهیم. در نتیجه:

$$x(t) = [x(0) - x(\infty)] e^{-t/\tau} + x(\infty)$$

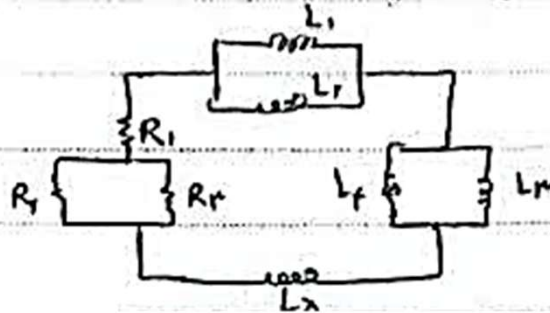
مانند به رابطه‌ی فوق برای حل مسائل این فصل، می‌توانیم معادله‌ی دیفرانسیل را به صورت x و x_{∞} و τ را بدست آورده و در دو رابطه‌ی فوق قرار دهیم.

مدارهای این فصل به صورت ترکیب یک مقاومت با یک سلف و یک مقاومت با یک خازن است



مدار RL مدار RC

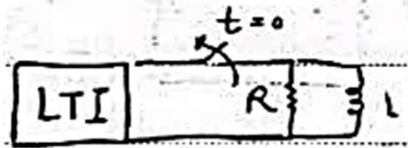
البته مدارهای فوق R ، L و C می توانند نمایندگی یک مجموعه ای باشند یعنی مدارری نیز یک مدار سری اول است



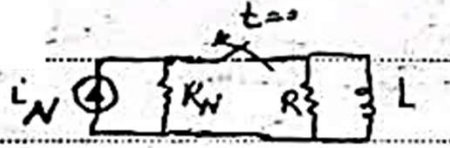
$$\left\{ \begin{array}{l} R = R_1 + (R_2 // L_1) \\ L = L_2 + (L_3 // R_4) \end{array} \right.$$

پاسخ ورودی صفر: منظور از پاسخ ورودی صفر یعنی این که می خواهیم جریان سلف و یا ولتاژ خازن را
 هنگامی بدست آوریم که منبع انرژی بدون مدار متصل نیست (ورودی صفر) بلکه سلف مقدار
 جریان اولیه و خازن مقدار ولتاژ اولیه دارد.

سلف: پاسخ ورودی صفر مدل RL



با قلم بردن معادل نوین شکلی LTI داریم.



مدل فوق را در بازه‌ی زمانی $t > 0$ داریم که می‌نویسیم

• زمانهای • t_N (خطی وصل بوده)

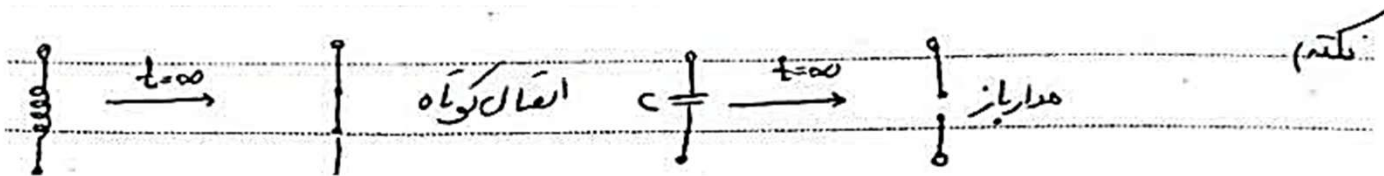


نشان دهنده مقدار ثابت دار را گذشت زمان
 تقییمی در جریان ها و ولتاژهای مدار داریم. بنابراین:

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\varphi_C}{dt} = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow r_L = L \frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow \text{سلف اتصال کوتاه}$$

$$\frac{d\varphi_C}{dt} = 0 \Rightarrow i_C = C \frac{d\varphi_C}{dt} = 0 \Rightarrow \text{خازن مدار باز}$$

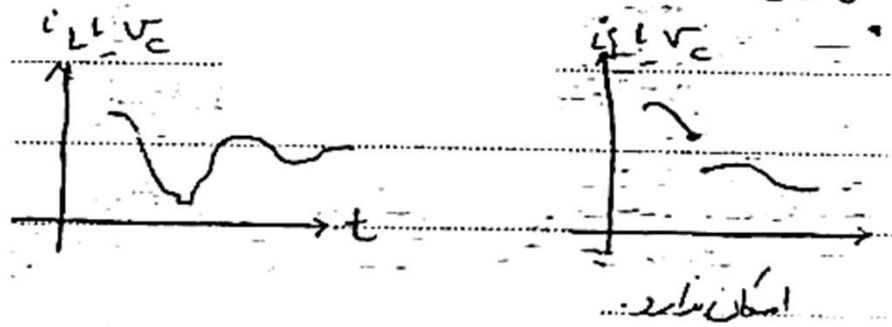


از آن جایی که فرض می‌کنیم که از ابتدا مدار برده است. بنابراین در لحظه‌ای $t = 0^-$ (یعنی لحظه قبل از اتصال منبع) به نحایی زمان گذشته است. و سطح اتصال کوتاه شده است.



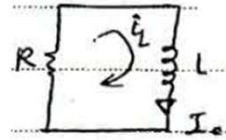
$I_0 = i_N$ جریان اولیه

نکته: در شرایط عادی جریان سلف و ولتاژ خازن می‌تواند به سادگی از این صورت در ولتاژ خازن و جریان سلف تابع ضرب اتفاق می‌افتد.



$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_N$

• زمان‌های $t > 0$ (کپیداناس)



$$KVL: v_R + v_L = 0$$

$$R i_L + L \frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = 0 \quad \text{که } i_L(0) = I_0$$

می‌دانیم: $i_L(t) = A e^{\alpha t}$

جایگزینی:

$$A \alpha e^{\alpha t} + \frac{R}{L} (A e^{\alpha t}) = 0$$

$$\Rightarrow A e^{\alpha t} \left(\alpha + \frac{R}{L} \right) = 0$$

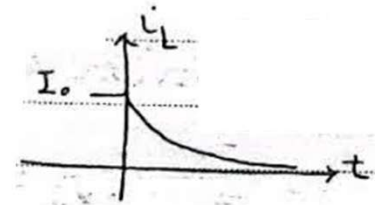
$$\Rightarrow \alpha = -\frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = A e^{-\frac{R}{L} t}$$

برای پیدا کردن ضریب مجهول A مقدار اولیه استفاده می‌کنیم

$$t=0 \Rightarrow i_L(0) = I_0 = A e^0 \Rightarrow A = I_0$$

$$\Rightarrow i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$



* $x(t) = [x_0 - x(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty)$ به صورت اول به صورت

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x = k$$

می توانست جواب را به این آیدون حل معادله دیفرانسیل و با جایگزینی در رابطه می * به دست آورد

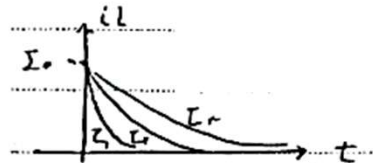
$$x(\infty) = \infty$$

$$x(0) = I_0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}$$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

تعریف ثابت زمانی τ در مدارهای RL همیشه برابر مقدار $\frac{L}{R}$ است ثابت زمانی می نویسد
 $i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \leftarrow \tau = \frac{L}{R}$

هر چه مقدار ثابت زمانی بزرگتر باشد مدار دیرتر به مقدار پایدار خود خواهد رسید



$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$$

هر توان نشان داده مدارهای جدیدی اول مدار بعد از تقریباً $\frac{1}{2}$ ثابت زمان به مدارهای خود می رسند

$$i_L = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$t = \tau \quad i_L = I_0 e^{-1} = 0.37 I_0$$

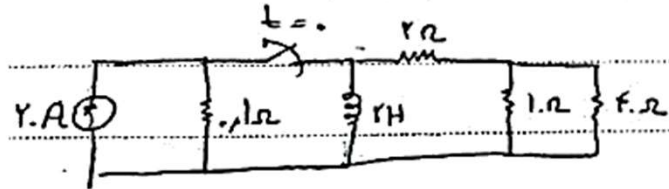
$$t = 2\tau \quad i_L = I_0 e^{-2} = 0.14 I_0$$

$$t = 4\tau \quad i_L = I_0 e^{-4} = 0.02 I_0 \approx 0 \quad \text{مقدار بسیار کم}$$

نکته: در مدارهای جدید اول بهتر است در ابتدا جریان صاف و ولتاژ بارزن را به دست آورده، سپس از روی آن حسابهای متفرجی مدار را مطالعه کنیم

مثال) در مدار شکل زیر یک دیسک پورده است. ولتاژی $t=0$ باز می شود. مطلوب است

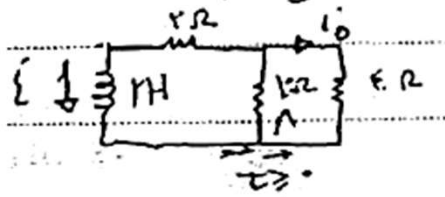
الف) جریان i_L ب) توان تلف شده در مقاومت 4Ω



چون برای $t > 0$ منبع در مدار نداریم بنابراین $i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ و الف

• محاسبه I_0 : برای محاسبه I_0 می دانیم $(t=0)$ یک دیسک پورده است و تلف اتصال کوتاه شده است. در نتیجه $I_0 = 2A$

• محاسبه τ : برای محاسبه τ باید مدار را در $t > 0$ در نظر گرفت. پس داریم $\tau = \frac{L}{R}$



$$R = (b // r_0) + 2 = 1 \Omega$$

مقاومت معادل در سران

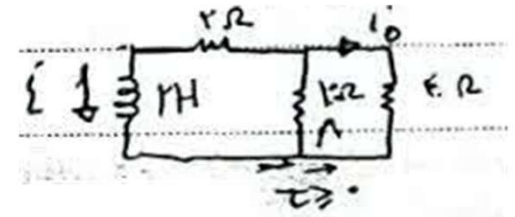
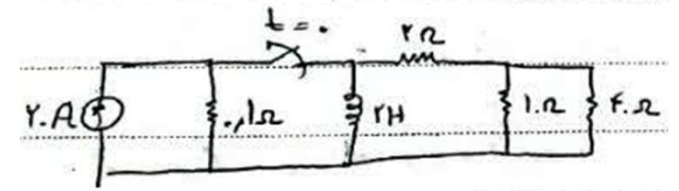
$$\tau = \frac{1}{1} = 1$$

$$i_L(t) = 1 \cdot e^{-t} \quad t \geq 0$$

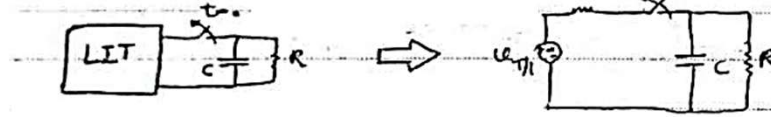
$$i_0 = \frac{1}{1+2} \cdot i_L = \frac{1}{3} e^{-t} \quad t \geq 0$$

مقاومت در این

$$P_{2\Omega} = 2 \cdot (i_0)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} e^{-t} \right)^2$$

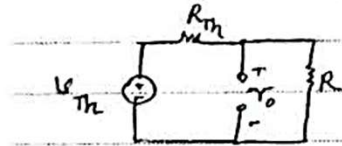


برای پاسخ در درایه صفری مدار RC:



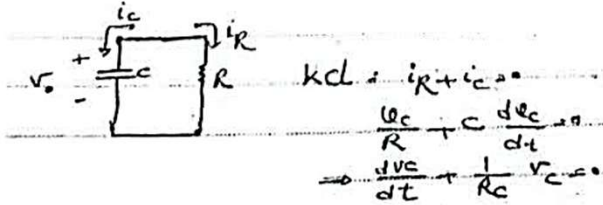
• $t = 0$ (کلید بسته):

چون به بهایست نهان گذشته، برای این خازن مدار از صفر می‌شود.



در لحظه اولی: $V_c(0) = 0$ ، $V_{th} = V_0$ ، $R_{th} = R$

• $t > 0$ (کلید باز):



$\Rightarrow V_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

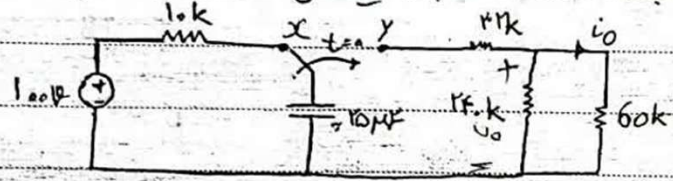
جمع بندی:

برای پاسخ در درایه صفری:

 مدار RL: $I = \frac{V}{R}$ ، $t = \frac{L}{R}$

 مدار RC: $V = V_0$ ، $t = RC$

مثال) در مدار زیر کپاسیتورها در وضعیت x بوده در $t=0$ به وضعیت y می رود مطلوب است



الف) $i_o(t)$

ب) $V_o(t)$

ج) $i_o(t)$

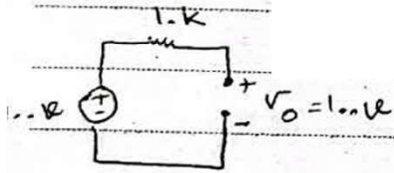
م کل انرژی تلف شده در مقاومت $60k\Omega$

د) الف

چون در $t > 0$ مسیفر در وضعیت y می باشد پس $V_o(t) = 1.0e^{-t/\tau}$

محاسبه V_o :

در این حالت کپاسیتور وضعیت x بوده و مدار به این صورت است



محاسبه τ : در $t > 0$ کپاسیتور به وضعیت y می باشد پس



$$R = (24k \parallel 4k) + 3k = 10k$$

$$\Rightarrow \tau = (0.15 \times 10^{-6}) (10 \times 10^3) = 1.5 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau} = 666.67$$

$$\Rightarrow V_o(t) = 100e^{-666.67t} \quad t \geq 0$$

$$v_{oc}(t) = \frac{(24 // 4)}{(24 // 4) + 22} \times 12e = 4e^{-25t} \quad t \geq 0 \quad \text{ج} \quad v_{oc}(t)$$

قسمت ب

دقت کنید که تنها ولتاژ دوسر مداران و جریان عبوری از یخچال پیوسته هستند و ممکن مثال
 در این مثال ولتاژ دوسر معادست ۲۴ k پیوسته نیست زیرا

$$\begin{aligned}
 v_o(0^-) &= 0 \\
 v_o(0^-) &= 2 \times e^{-0} = 2 \\
 \Rightarrow v_o(0^-) &\neq v_o(0^+)
 \end{aligned}$$

$$i_o = \frac{v_o}{4k} = e^{-25t} \text{ mA} \quad t \geq 0 \quad \text{د}$$

$$p_{ck} = 2k i_o^2 = 60e^{-50t} \text{ mW} \quad t \geq 0 \quad \text{د}$$

$$\Rightarrow w_{ck} = \int_0^\infty p_{ck} dt = 1.2 \text{ mJ}$$

مدارهای اجنبی ثابت زمانی:

تا این جا مدارهایی را بررسی کردیم که در آن ها تنها یک عنصر غیر وضعیتی می داد. اگر یک عنصر جوی زمان صفر در زمان t_0 جابجاشود خواهیم داشت:

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} \quad t \geq t_0$$

$$v_C(t) = v_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} \quad t \geq t_0$$

در مدارهایی که چند عنصر وجود دارد در یک یک عنصر جابجاشود می شود به جای یک ثابت زمانی چند ثابت زمانی خواهیم داشت:

نکته ۱) در این گونه مدارها باید مدار را در فاصله زمانی بین یک عنصر زین ها جدا گانه تحلیل کنیم

نکته ۲) در مدارهایی که زمانی فرکانس می کنیم مدار را به این ترتیب تقسیم می کنند (یعنی یک عنصر زین بعدی را در نظر نمی گیریم) و معادله یک بعدی می آوریم.

نکته ۳) مدارها را به سه مرحله (زمان یک عنصر زین بعدی) همان مقدار اولیه برای مرحله ی بعد خواهد بود.

