



دانشگاه سمنان
Semnan University
پردیس فرزنانگان

بسمه تعالی



دانشگاه سمنان
Semnan University
پردیس فرزنانگان

آیه ۳ سوره طلاق:

وَيَرْزُقُهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ وَمَنْ يَتَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ فَهُوَ حَسْبُهُ إِنَّ اللَّهَ بَالِغُ أَمْرِهِ قَدْ جَعَلَ اللَّهُ لِكُلِّ شَيْءٍ قَدْرًا

و از جایی که گمان نبرد به او روزی عطا کند، و هر که بر خدا توکل کند خدا او را کفایت خواهد کرد که خدا امرش را نافذ و روان می‌سازد و بر هر چیز قدر و اندازه‌ای مقرر داشته است.



دانشگاه سمنان
Semnan University
پردیس فرزنانگان

مدارهای منطقی

مراجع درس

طراحی دیجیتال (مدار منطقی)

نویسنده: موریس مانو

مترجمان: دکتر حسن سیدرضی - دکتر فرهاد ارومچیان

ناشر: ناقوس

تحلیل و طراحی مدارهای منطقی دیجیتال

نویسندگان: بیل دی کارول، جی دیوید اروین، ویکتوری
نلسون، اچ. تروی ناگل

مترجم: محمود دیانی

ناشر: نص



مدارهای منطقی

فهرست مطالب

فصل اول: نمایش اطلاعات در سیستم‌های منطقی

فصل دوم: جبر بول و گیت‌های منطقی

فصل سوم: ساده‌سازی توابع بول

فصل چهارم: مدارهای منطقی ترکیبی

فصل چهارم: مدارهای منطقی ترتیبی

ارزشیابی

۸ نمره میان ترم



۱۰ نمره پایان ترم



۳ نمره تکلیف



مجموع از ۲۱ نمره

مفاهیم اولیه

با پیشرفت علم الکترونیک و فناوری اطلاعات، سیستم‌های دیجیتال به بخش جدایی‌ناپذیر زندگی روزمره انسان تبدیل شده‌اند. از رایانه‌ها و تلفن‌های همراه گرفته تا سیستم‌های کنترل صنعتی، همه بر پایه مفاهیم سیستم‌های دیجیتال طراحی و پیاده‌سازی شده‌اند.

سیستم دیجیتال سیستمی است که اطلاعات را به صورت مقادیر گسسته (معمولاً دو حالت) نمایش، ذخیره و پردازش می‌کند. در اغلب سیستم‌های دیجیتال، این مقادیر به شکل ۰ و ۱ (صفر و یک) بیان می‌شوند که به آن‌ها سطوح منطقی گفته می‌شود.

در سیستم‌های دیجیتال، اطلاعات به کمک سیگنال‌های دیجیتال منتقل می‌شوند. این سیگنال‌ها فقط می‌توانند در دو سطح مشخص قرار گیرند:

سطح منطقی ۰ LOW

سطح منطقی ۱ HIGH

سیستم دودویی

یک عدد دهدهی مانند 7,392 کمیتی معادل با 7 هزرتایی، بعلاوه 3 صدتایی، بعلاوه 9 دهتایی بعلاوه 2 واحد را نشان می‌دهد. هزارها، صدها و غیره توانی از 10 هستند که با توجه به مکان ضرایب معین می‌گردند. دقیق‌تر بگوییم، 7,392 را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

با این وجود عرف این است که فقط ضرایب را بنویسیم و توان‌های لازم 10 را از مکان آنها استنتاج کنیم. به طور کلی یک عدد با نقطه اعشاری با یک سری ضرایب به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} a_{-3}$$

که ضرایب a_i هر یک از ده رقم (0, 1, 2, ..., 9) بوده و از مکان عدد را نشان می‌دهد، و از این رو توان 10

که ضریب در آن ضرب می‌گردد مشخص خواهد شد. این مطلب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$10^5 a_5 + 10^4 a_4 + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 + 10^{-1} a_{-1} + 10^{-2} a_{-2} + 10^{-3} a_{-3}$$

سیستم اعداد دهدهی را در مبنای 10 گوییم زیرا از 10 رقم استفاده می‌کند و ضرایب در توانی از 10 ضرب می‌گردند. سیستم دودویی یک سیستم اعداد متفاوت است. ضرایب سیستم اعداد دودویی فقط دو مقدار ممکن را دارند: 0 و 1. هر ضریب a_i در 2^i ضرب می‌گردد. مثلاً معادل دهدهی عدد دودویی 11010.11 برابر 26.75 می‌باشد، که از ضرب ضرایب در توان‌هایی از 2 بدست می‌آید:

$$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 26.75$$

سیستم دودویی

به طور کلی، یک عدد در مبنای r به صورت حاصلضرب توانهای r در ضرایب مربوطه‌اش بیان می‌گردد:

$$a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + a_2 \cdot r^2 + a_1 \cdot r + a_0 + a_{-1} \cdot r^{-1} + a_{-2} \cdot r^{-2} + \dots + a_{-m} \cdot r^{-m}$$

که ضرایب a بین 0 تا $r-1$ می‌باشند. برای تفکیک اعداد در مبناهای مختلف، ضرایب را در داخل پرانتزها نوشته و اندیس مبنای آن می‌گذاریم (به جز در اعداد دهدهی که محتوا بیانگر دهدهی بودن است). مثالی از عدد مبنای 5 چنین است

$$(4021.2)_5 = 4 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} = (511.4)_{10}$$

مقدار ضرایب در مبنای 5 فقط 0، 1، 2، 3، 4 می‌باشند. سیستم اعداد هشت هشتی یک سیستم مبنای 8 با هشت رقم 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 می‌باشد. مثالی از یک عدد مبنای هشت 127.4 است. برای تعیین مقدار معادل دهدهی، عدد را به صورت یک سری از توانها با مبنای 8 بسط می‌دهیم.

$$(127.4)_8 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 4 \times 8^{-1} = (87.5)_{10}$$

توجه کنید که ارقام 8 و 9 نمی‌توانند در یک عدد هشت هشتی ظاهر شوند.

هنگامی که تعداد ارقام کمتر از 10 باشد مرسوم است که r رقم مورد نیاز برای ضرایب از سیستم دهدهی گرفته شود. هنگامی که مبنای عدد از 10 بزرگتر است از حروف الفبا برای تکمیل 10 رقم دهدهی استفاده می‌گردد. مثلاً در سیستم اعداد شانزده شانزدهی (مبنای 16)، ده رقم اول از سیستم دهدهی گرفته می‌شوند. حروف A، B، C، D، E و F به ترتیب به جای ارقام 10، 11، 12، 13، 14 و 15 به کار می‌روند. مثالی از یک عدد در مبنای 16 به صورت زیر است.

$$(B65F)_{16} = 11 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = (46,687)_{10}$$

جدول ۱-۲. اعداد با مبناهای متفاوت

دهمگی (مبنای 10)	دودویی (مبنای 2)	هشتایی (مبنای 8)	شانزده تایی (مبنای 16)
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

تبدیل مبنای اعداد

همانطور که قبلاً مشاهده شد، تبدیل یک عدد در مبنای r به مبنای ده با بسط عدد به صورت یک سری از توانها و جمع همه جملات انجام می‌شود. اکنون برای تبدیل معکوس یک عدد دهدهی به یک عدد در مبنای r روالی کلی را ارائه می‌کنیم. اگر عدد حاوی نقطه ممیز باشد، لازم است تا عدد به دو

بخش صحیح و کسری تفکیک گردد زیرا هر بخش باید به طور جداگانه تبدیل شود. تبدیل یک عدد صحیح دهدهی به یک عدد در مبنای r با تقسیم عدد و همه خارج قسمت‌های متوالی بر r و جمع‌آوری باقیمانده‌ها انجام می‌گردد. بهتر است روال را با مثالی تشریح کنیم.

عدد 41 را به دودویی تبدیل کنید. ابتدا 41 را بر 2 تقسیم می‌کنیم تا خارج قسمت 20 و باقیمانده $1/2$ بدست آید. خارج قسمت مجدداً بر 2 تقسیم می‌گردد تا خارج قسمت و باقیمانده جدیدی بدست آید. این روال تا رسیدن به خارج قسمت 0 ادامه می‌یابد. ضرایب عدد دودویی موردنظر به طریق زیر از باقیمانده‌ها بدست می‌آید:

ضریب عدد دودویی	باقیمانده	خارج قسمت صحیح	
$a_0 = 1$	$\frac{1}{2}$	20	$41/2 =$
$a_1 = 0$	0	10	$20/2 =$
$a_2 = 0$	0	5	$10/2 =$
$a_3 = 1$	$\frac{1}{2}$	2	$5/2 =$
$a_4 = 0$	0	1	$2/2 =$
$a_5 = 1$	$\frac{1}{2}$	0	$1/2 =$
جواب : $(41)_{10} = (a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)_2 = (101001)_2$			

بنابراین، پاسخ $(101001)_2 = (a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0) = (41)_{10}$ می‌باشد.

$$(42)_{10} = (x)_2$$

مثال:

$$x = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$$

Diagram illustrating the Huffman tree construction process:

- Initial nodes: 42 (0), 21 (1), 10 (0), 5 (1), 2 (0), 2 (1).
- Merge 42 (0) and 21 (1) to form 62 (0).
- Merge 62 (0) and 10 (0) to form 72 (0).
- Merge 72 (0) and 4 (1) to form 86 (1).
- Merge 86 (1) and 2 (0) to form 108 (0).
- Merge 108 (0) and 2 (1) to form the root node 126 (1).

عدد $(0.6875)_{10}$ را به دودویی تبدیل کنید. ابتدا 0.6875 در 2 ضرب می‌شود تا یک عدد صحیح و یک کسر حاصل گردد. کسر دوباره در 2 ضرب می‌شود تا یک عدد صحیح جدید و یک کسر جدید بدست آید. این فرآیند ادامه می‌یابد تا بخش کسری صفر گردد و یا تعداد ارقام دقت مناسبی را ارائه دهند. ضرایب عدد دودویی از اعداد صحیح به صورت زیر بدست می‌آید.

ضریب	کسری	+	صحیح	
$a_{-1} = 1$	0.3750	+	1	$0.6875 \times 2 =$
$a_{-2} = 0$	0.7500	+	0	$0.3750 \times 2 =$
$a_{-3} = 1$	0.5000	+	1	$0.7500 \times 2 =$
$a_{-4} = 1$	0.0000	+	1	$0.5000 \times 2 =$

بنابراین پاسخ $(0.1011)_2 = (0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4})_2 = (0.6875)_{10}$ خواهد بود.

مثال ۴-۱

$(0.513)_{10}$ را به مبنای هشت ببرید.

$$0.513 \times 8 = 4.104$$

$$0.104 \times 8 = 0.832$$

$$0.832 \times 8 = 6.656$$

$$0.656 \times 8 = 5.248$$

$$0.248 \times 8 = 1.984$$

$$0.984 \times 8 = 7.872$$

جواب تا هفت رقم با معنی که از بخش صحیح حاصل ضرب‌ها بدست می‌آید برابر است با

$$(0.513)_{10} = (0.406517 \dots)_8$$

مثال:

$$(248)_{10} = (x)_8$$

$\begin{array}{r} 248 \\ \underline{248} \\ \textcircled{0} \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 31 \\ \underline{24} \\ \textcircled{7} \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ \hline \textcircled{3} \end{array}$
	$\swarrow$	

$$x = 370$$

عكس حالت مقابل:

$$(370)_8 = (x)_{10}$$

2 1 0

↑ ↑ ↑

3 7 0

$$(3 \times 8^2) + (7 \times 8^1) + (0 \times 8^0)$$

$$192 + 56 + 0 = 248$$

۴-۱ اعداد مبنای هشت و شانزده

تبدیل از مبنای دو به مبنای هشت و شانزده، و بالعکس نقش عمده‌ای در کامپیوترهای دیجیتال بازی می‌کند. چون $2^3 = 8$ و $2^4 = 16$ است، هر رقم در مبنای هشت متعلق به سه رقم دودویی و هر رقم مبنای شانزده متعلق به چهار رقم دودویی است. در جدول ۱-۲ شانزده عدد اول سیستم اعداد دهدهی، دودویی، هشت هشتی و شانزده شانزدهی لیست شده‌اند.

تبدیل از دودویی به هشت هشتی به سادگی با تفکیک عدد دودویی به گروه‌های سه رقمی در دو طرف نقطه دودویی بدست می‌آید. سپس به هر گروه یک رقم مبنای هشت تعلق می‌گیرد. مثال زیر روال مربوطه را نشان می‌دهد:

$$\begin{array}{cccccccccc} (10 & 110 & 001 & 101 & 011 & \cdot & 111 & 100 & 000 & 110)_2 = (26153.7406)_8 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & & 7 & 4 & 0 & 6 \end{array}$$

تبدیل از مبنای دو به مبنای شانزده نیز مشابه با روند فوق است، با این تفاوت که عدد دودویی به گروه‌های چهار رقمی تفکیک می‌شوند:

$$\begin{array}{ccccccc} (10 & 1100 & 0110 & 1011 & \cdot & 1111 & 0010)_2 = (2C6B.F2)_{16} \\ 2 & C & 6 & B & & F & 2 \end{array}$$

تبدیل از مبنای هشت یا شانزده به دودویی با روشی عکس روش بالا انجام می‌گردد. هر رقم مبنای هشت با سه رقم مبنای دو معادل خود جایگزین می‌شود. به طور مشابه، هر رقم مبنای شانزده با چهار رقم دودویی معادلش جایگزین خواهد شد. این مطلب در مثال‌های زیر تشریح شده است:

$$(673.124)_8 = (\underbrace{110}_6 \underbrace{111}_7 \underbrace{011}_3 \cdot \underbrace{001}_1 \underbrace{010}_2 \underbrace{100}_4)_2$$

و

$$(306.D)_{16} = (\underbrace{0011}_3 \underbrace{0000}_0 \underbrace{0110}_6 \cdot \underbrace{1101}_D)_2$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} F & 3 & A & 7 & C & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1111 & 0011 & 1010 & 0111 & 1100 & 0010 \end{array} \right)_{16} = (x)_2$$

$$x = 111100111010011111000010$$

عکس مطلب فوق:

$$(10110111101)_2 = (x)_{16}$$

$$\leftarrow \underbrace{0101}_5 \underbrace{1011}_B \underbrace{1101}_D \rightarrow x = 5BD$$

به دلیل کمبود رقم در سمت چپ صفر گذاشتیم

مثالی از تبدیل مبنای 8 به 2

$$\left(\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 1 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 100 & 011 & 001 & 110 \end{array} \right)_8 = (x)_2$$

$$x = 100011001110$$

مثالی از عکس حالت فوق:

$$(11100001)_2 = (x)_8$$

$$x = 341 \quad \checkmark \quad \underbrace{011}_3 \quad \underbrace{100}_4 \quad \underbrace{001}_1 \quad \text{اضافه کردیم}$$

تبدیل مستقیم مبنای 8 به 16 و بالعکس

برای تبدیل عدد مبنای 16 به 8 به طریق زیر عمل می‌کنیم: ابتدا عدد مبنای 16 را 4 تا 4 تا به صورت مبنای 2 پیاده می‌کنیم، سپس 3 تا 3 تا از سمت راست آن را به مبنای 8 تبدیل می‌کنیم. عکس این روش:

عدد مبنای 8 را 3 تا 3 تا پیاده کرده و سپس از سمت راست 4 تا 4 تا آن را به مبنای 16 می‌بریم!

جمع اعداد باینری

جمع اعداد باینری بسیار ساده و مشابه جمع اعداد در مبنای دهدهی است.

از سمت راست دو رقم، دو رقم با هم جمع کرده و رقم نقلی (Carry) اضافه را به رقم بعدی منتقل میکنیم و سپس با آنها جمع میکنیم.

برای جمع اعداد باینری به صورت زیر باید عمل کنیم:

$$0 = 0 + 0$$

$$1 = 1 + 0$$

$1 + 1 = 0$, مقدار رقم نقلی ۱ است.

$1 + 1 + 1 = 1$, مقدار رقم نقلی ۱ است.

		1	1	1		1		1		
		0	1	0	1	0	1	0	1	
		+	1	0	1	1	0	1	0	1
		(266) ₁₀								

$(85)_{10}$
 $+(181)_{10}$

تفریق اعداد باینری

برای تفریق اعداد باینری از متمم ها استفاده می شود.

متمم ها در کامپیوترهای دیجیتال برای ساده کردن عمل تفریق و یا عملیات منطقی به کار می روند. در هر مبنایی چون r ، دو نوع متمم وجود دارد:

متمم مبنا

متمم مبنای کاهش یافته

فرم اول به متمم r و دومی به متمم $r-1$ موسوم است. وقتی که مقدار مبنا یا پایه را جایگزین کنیم، برای اعداد دودویی، متمم های 2 و 1 و برای اعداد دهدهی، متمم های 10, 9 را خواهیم داشت.

متمم در مبنای کاهش یافته

با فرض داشتن عددی n رقمی مانند N در مبنای r ، متمم $(r-1)$ عدد به صورت $N - (r^n - 1)$ تعریف می‌شود. برای اعداد دهدهی، $r = 10$ و $r-1 = 9$ است، و به این ترتیب متمم 9 عدد N برابر $N - (10^n - 1)$ خواهد بود. در اینجا 10^n نمایشگر عددی است که متشکل از یک 1 و به دنبال آن n عدد 0 می‌باشد. $10^n - 1$ عددی است که با n عدد 9 نشان داده می‌شود. مثلاً اگر $n = 4$ باشد، داریم $10^4 = 10000$ و $10^4 - 1 = 9999$. به این ترتیب نتیجه می‌شود که متمم 9 یک عدد دهدهی با تفریق هر رقم از 9 حاصل خواهد شد. به چند مثال عددی زیر توجه کنید.

متمم 9 عدد 546700 برابر است با $453299 = 546700 - 99999$

متمم 9 عدد 012398 برابر است با $987601 = 012398 - 99999$

برای اعداد دودویی، $r = 2$ و $r-1 = 1$ است، بدین ترتیب متمم 1 عدد N ، $N - (2^n - 1)$ خواهد بود. مجدداً، 2^n برابر با یک عدد دودویی است که از یک 1، و n عدد 0 تشکیل شده است. $2^n - 1$ یک عدد دودویی متشکل از n عدد 1 می‌باشد. مثلاً اگر $n = 4$ باشد، داریم $2^4 = 10000_2$ و $2^4 - 1 = 1111_2$. بنابراین متمم 1 یک عدد دودویی از تفریق هر رقم از 1 بدست می‌آید. با این وجود، هنگام تفریق ارقام دودویی از 1، یکی از دو حالت $1 - 0 = 1$ و یا $1 - 1 = 0$ را خواهیم داشت، که سبب می‌شود هر بیت از 0 به 1 و از 1 به 0 تبدیل شود. بنابراین متمم یک عدد دودویی با تغییر 1ها به 0 و 0ها به 1 حاصل می‌گردد. در زیر مثال‌هایی آورده شده است:

متمم 1 عدد 1011000 برابر است با 0100111

متمم 1 عدد 0101101 برابر است با 1010010

متمم $(r-1)$ اعداد مبنای هشت و شانزده به ترتیب از تفریق ارقام آنها از 7 یا F (15 دهدهی) حاصل می‌شود.

متمم مبنا

متمم r یک عدد n رقمی مانند N در مبنا r به صورت $r^n - N$ به ازاء $N \neq 0$ و برابر با 0 در ازاء $N=0$ تعریف می شود. از مقایسه این متمم با متمم $(r-1)$ نتیجه می شود که متمم r از جمع 1 با متمم $(r-1)$ حاصل می شود زیرا $r^n - N = [(r^n - 1) - N] + 1$ می باشد. به این ترتیب متمم 10 یک عدد دهدهی مانند 2389 برابر است با $7611 + 1 = 7610$ که از جمع 1 به مقدار متمم 9 حاصل می گردد. متمم 2 عدد دودویی 101100 برابر است با $010100 + 1 = 010011$ و از جمع 1 با مقدار متمم 1 بدست می آید. چون 10^n عددی است که با یک 1 و n عدد 0 به دنبال آن نمایش داده می شود، $10^n - N$ که متمم 10 عدد N است نیز با تغییر ندادن 0 های کم ارزش تر و تفریق اولین رقم غیر صفر کم ارزش تر از 10 و تفریق همه رقم های با ارزش تر از 9 حاصل می گردد.

متمم 10 عدد 012398 برابر 987602 می باشد

متمم 10 عدد 246700 برابر 753300 است

متمم 10 اولین عدد با تفریق 8 از 10 در کم ارزش ترین مکان و تفریق دیگر ارقام از 9 حاصل شده است. متمم 10 دومین عدد بدین ترتیب حاصل گشته است که دو 0 کم ارزش تر را می شوند، 7 از 10 و دیگر ارقام از 9 تفریق می گردند.

به طور مشابه متمم 2 می تواند با رها کردن همه 0 های کم ارزش تر و نیز تغییر نکردن اولین 1 و جایگزینی همه 0 ها با 1 ها و 1 ها با 0 ها در دیگر ارقام با ارزش تر حاصل شود.

متمم 2 عدد 1101100 برابر 0010100 است

متمم 2 عدد 0110111 برابر 1001001 است

متمم 2 اولین عدد با رها کردن دو 0 کم ارزش تر و اولین 1 و سپس جایگزینی همه 1 ها با 0 و 0 ها با 1 در چهار رقم با ارزش تر باقیمانده بدست می آید. متمم 2 دومین عدد با رها کردن اولین 1 و متمم کردن دیگر ارقام حاصل می گردد. در تعاریف قبلی، فرض شد که اعداد دارای نقطه ممیز نیستند. اگر عدد اولیه N حاوی ممیز باشد باید آن را موقتاً حذف نمود تا متمم r و $(r-1)$ بدست آید. آنگاه آن را به مکان مربوطه اش باز می گردانیم. توجه داشته باشید که متمم یک متمم، عدد را به حالت اولیه اش باز می گرداند. متمم r عدد N برابر $r^n - N$ است. متمم یک متمم برابر است با $r^n - (r^n - N) = N$ ، که همان عدد اولیه است.

تفریق به کمک متمم‌ها

روش مستقیم تفریق که در مدارس ابتدایی بیان شد از مفهوم قرض کردن استفاده می‌نماید. در این روش وقتی که یک رقم در مفروق‌منه کوچکتر از مفروق باشد یک 1 از رقم باارزش‌تر قرض گرفته می‌شود. این روش هنگامی که تفریق با قلم و کاغذ انجام شود به خوبی کار می‌کند. با این وجود، هنگام پیاده‌سازی تفریق با سخت‌افزار دیجیتال، روش کمتر از روش‌های متمم کارایی دارد.

تفریق دو عدد n رقمی بی‌علامت $M - N$ در مبنای r به صورت زیر انجام می‌شود.

۱- مفروق‌منه M را به متمم r مفروض N ، اضافه کنید. یعنی

$$M + (r^n - N) = M - N + r^n$$

۲- اگر $M \geq N$ باشد، عمل جمع یک رقم نقلی انتهایی تولید می‌کند که باید چشم‌پوشی شود؛ آنچه

باقی می‌ماند نتیجه $M - N$ است.

۳- اگر $M < N$ باشد، عمل جمع هیچگونه رقم نقلی انتهایی تولید نمی‌کند و جواب برابر با

$r^n - (M - N)$ است که همان متمم r عمل $(M - N)$ می‌باشد. برای یافتن جواب معمول، متمم

r حاصل جمع را بدست می‌آوریم و سپس یک علامت منفی در جلو آن می‌گذاریم.

مثال ۵-۱

با استفاده از متمم 10 تفریق $72532 - 3250$ را انجام دهید.

$$\begin{aligned}
 M &= 72532 \\
 \text{متمم 10 عدد } N &= + \underline{96750} \\
 \text{حاصل جمع} &= 169282 \\
 \text{چشم پوشی از رقم نقلی انتهای } 10^5 &= - \underline{100000} \\
 \text{جواب} &= 69282
 \end{aligned}$$

توجه کنید که M دارای 5 رقم ولی N فقط 4 رقمی است. چون هر دو عدد باید دارای تعداد ارقام برابری باشند، پس N به صورت 03250 نوشته می شود. متمم 10 این عدد N ، یک 9 در باارزش ترین مکان تولید می نماید. تولید رقم نقلی در باارزش ترین مکان دلالت بر $M \geq N$ دارد و نتیجه نیز مثبت است.



مثال ۶-۱

با استفاده از متمم 10، تفریق $3250 - 72532$ را بدست آورید.

$$\begin{array}{rcl} M & = & 03250 \\ N \text{ متمم 10 عدد} & = & + \underline{27468} \\ \text{حاصل جمع} & = & 30718 \end{array}$$

که رقم نقلی در آن وجود ندارد.

بنابراین جواب (متمم 10 عدد 30718) $-69282 =$ است.

مثال ۷-۱

با فرض دو عدد دودویی $X = 1010100$ و $Y = 1000011$ ، تفریق‌های زیر را انجام دهید.

(الف) $X - Y$ و (ب) $Y - X$ با استفاده از متمم 2

$$\begin{array}{rcl}
 X & = & 1010100 \quad \text{(الف)} \\
 \text{متمم 2 عدد } Y & = & + \underline{0111101} \\
 \text{حاصل جمع} & = & 10010001 \\
 \text{چشم‌پوشی از نقلی انتهایی } 2^7 & = & - \underline{10000000} \\
 X - Y & = & 0010001 \quad \text{جواب:}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 Y & = & 1000011 \quad \text{(ب)} \\
 \text{متمم 2 عدد } X & = & + \underline{0101100} \\
 \text{حاصل جمع} & = & 1101111
 \end{array}$$

رقم نقلی انتهایی وجود ندارد.

بنابراین، جواب $X - Y = (\text{متمم 2 عدد } 1101111) = -0010001$ است.

۶-۱ اعداد دودویی علامت دار

اعداد صحیح مثبت و از آن جمله صفر را می توان با اعداد بی علامت نشان داد. با این وجود برای نمایش اعداد صحیح منفی به علامتی نیاز داریم. در حساب معمولی، یک عدد منفی را با یک علامت منها و عدد مثبت را با علامت بعلاوه نشان می دهند. به دلیل محدودیت در سخت افزار، کامپیوترها باید هر چیزی را با ارقام دودویی نشان دهند. مرسوم است که علامت را با یک بیت واقع در سمت چپ ترین مکان عدد نمایش دهند. معمولاً اعداد مثبت را با گذاشتن 0 و اعداد منفی را با گذاشتن 1 در محل بیت مزبور معرفی می نمایند.

لازم است بدانیم که هر دو گروه اعداد دودویی علامت دار و بی علامت هنگام ارائه به کامپیوتر از رشته بیت ها تشکیل شده اند. معمولاً کاربر علامت دار بودن یا نبودن عدد را معین می نماید. اگر عدد دودویی علامت دار باشد سمت چپ ترین بیت، علامت، و بقیه بیت ها عدد هستند. اگر عدد دودویی بدون علامت فرض شود، سمت چپ ترین بیت، با ارزش ترین بیت عدد خواهد بود. مثلاً رشته بیت های 01001 می تواند به عنوان 9 (دودویی بی علامت) و یا $+9$ (دودویی علامت دار) در نظر گرفته شود زیرا سمت چپ ترین بیت 0 است. رشته بیت های 11001 به عنوان 25 بی علامت و یا -9 علامت دار خواهد بود زیرا در سمت چپ ترین مکان عدد، رقم 1 وجود دارد که بیانگر منفی بودن عدد، و بقیه چهار بیت عدد 9 را نشان می دهد. معمولاً اگر نوع عدد از قبل مشخص باشد هیچگونه اشتباهی در تشخیص وجود نخواهد داشت.

۹-۱ منطق دودویی

منطق دودویی با متغیرهایی که دو ارزش گسسته و عملیاتی که مفهوم منطقی دارند، سروکار دارد. دو ارزشی که متغیرها اختیار می‌کنند ممکن است با اسامی مختلفی نام‌گذاری شوند (مثل صحیح و غلط، بله و خیر و غیره)، اما برای ما بهتر است آن را برحسب بیت تصور کنیم و مقادیر 1 و 0 را به آن تخصیص دهیم. منطق دودویی معرفی شده در این بخش معادل با جبری به نام جبر بول است. جبر بول در فصل ۲ به طور مشروح‌تر بیان شده است. در این بخش جبر بول به روشی غیرمستدل بوده و ارتباط آن با مدارهای منطقی دیجیتال و سیگنال‌های دودویی بیان شده است.

تعریف منطق دودویی

منطق دودویی شامل متغیرهای دودویی و عملیات منطقی است. متغیرها با حروف الفبایی مانند A, B, C, x, y, z و غیره نام‌گذاری می‌شوند، که هر متغیر فقط و فقط دو مقدار مجزای 0 و 1 دارد. سه نوع عملیات منطقی اصلی وجود دارند: AND، OR و NOT.

۱- AND: این عمل به وسیله یک "." یا بدون ذکر هر عملگری نمایش داده می شود. مثلاً $x.y = z$ یا $xy = z$ را چنین می خوانیم "x AND y برابر است با z". عمل منطقی AND چنین تفسیر می شود که، $z = 1$ است اگر و فقط اگر $x = 1$ و $y = 1$ باشد؛ در غیر این صورت $z = 0$ است. (به یاد داشته باشید که x و y و z متغیرهای دودویی هستند و نمی توانند به جز 1 و 0 چیز دیگری باشند.)

AND		
x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



(الف) گیت AND دو ورودی

۲- OR : عملی است که با علامت بعلاوه نشان داده می شود. مثلاً $x + y = z$ را چنین می خوانیم

" $x \text{ OR } y$ برابر است با z " و به این معنی است که $z = 1$ است به شرطی که $x = 1$ یا $y = 1$ و یا هر دو $x = 1$ و $y = 1$ باشند. اگر هر دو $x = 0$ و $y = 0$ باشد آنگاه $z = 0$ خواهد بود.

OR		
x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



(ب) گیت OR دو ورودی

۳- NOT: این عمل با یک علامت پریم نشان داده می‌شود (و گاهی با یک خط بار). مثلاً $x' = z$ (یا $\bar{x} = z$) و چنین خوانده می‌شود، "not x" برابر است با "z" و به این معنی است که z چیزی است که x نیست. به بیان دیگر اگر $x = 1$ باشد آنگاه $z = 0$ ؛ اما اگر $x = 0$ باشد، آنگاه $z = 1$ است. عمل NOT را متمم هم می‌گویند چون 1 را به 0 و 0 را به 1 تبدیل می‌کند.

NOT

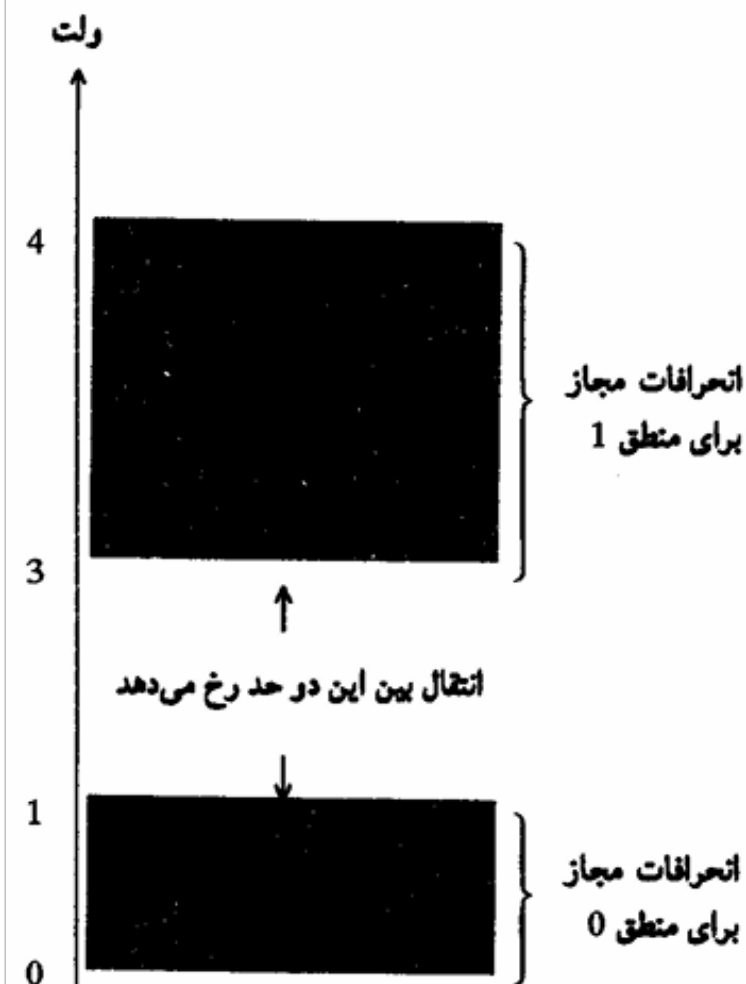
x	x'
0	1
1	0



(پ) گیت NOT برای معکوس کردن (وارونگر)

گیت‌های منطقی

گیت‌های منطقی، مدارهایی الکترونیک هستند که روی یک یا چند سیگنال ورودی عمل می‌کنند تا یک سیگنال خروجی تولید نمایند. سیگنال‌های الکترونیکی مانند ولتاژها یا جریان‌هایی که در سرتاسر یک سیستم دیجیتال وجود دارند دو مقدار جدا از هم را اختیار می‌کنند. مدارهایی که با ولتاژ کار می‌کنند به دو سطح ولتاژ که نمایشگر یک متغیر دودویی و برابر با منطق 1 و منطق 0 اند واکنش نشان می‌دهند. مثلاً یک سیستم دیجیتال خاص ممکن است منطق 0 را به عنوان سیگنالی برابر با 0 ولت و منطق 1 را به صورت سیگنالی برابر با 4 ولت تعریف کند.



تعریف جدول درستی یا جدول صحت

برای هر ترکیبی از مقادیر x و y ، مقدار معینی برای z وجود دارد که این مقدار پس از اعمال یا تعریف عمل منطقی مشخص می‌گردد. این تعاریف را می‌توان به صورت خلاصه یا استفاده از جدول درستی فهرست کرد. یک جدول درستی، جدولی است متشکل از تمام ترکیبات ممکن متغیرها و بیانگر ارتباط بین مقادیر آنها و نتایج حاصل از عمل مربوطه روی آنها می‌باشد. به عنوان مثال جداول درستی برای عملگرهای AND و OR با متغیرهای x و y ، با لیست کردن همه مقادیر ممکن آنها وقتی به صورت زوج ترکیب شده‌اند، حاصل می‌شود.

فصل دوم: جبر بول و گیت های منطقی

۱-۲ تعاریف اولیه

جبر بول را می توان مانند هر سیستم نتیجه ریاضی، به وسیله مجموعه ای از عناصر، یک مجموعه از الگوها و تعدادی اصول اثبات نشده یا بدیهیات تعریف نمود. یک مجموعه از عناصر کلکسیونی از اشیاء است که دارای خواص مشترکی باشند.

اصول یک سیستم ریاضی، فرضیات اولیه را تشکیل می دهند که با استفاده از آنها می توان قوانین و تئوری ها و خواص سیستم را نتیجه گرفت. مهمترین اصول بکار رفته در فرموله کردن ساختارهای جبری عبارتند از:

۱- بسته بودن: یک مجموعه S نسبت به عملگر دودویی بسته است به شرطی که برای هر جفت عنصر از S ، این عملگر عنصر منحصر به فردی از آن را به جفت عنصر منتسب نماید. به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ نسبت به عملگر جمع $(+)$ بسته گوییم زیرا برای هر دو عنصر $a \in S$ و b عنصر دیگری مانند $c \in N$ می توان یافت بطوری که $a+b=c$ باشد. مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عملگر تفریق بسته نیست چون داریم $2-3=-1$ در حالی که $2, 3 \in N$ و $-1 \notin N$ است.

۲- اصل شرکت پذیری: یک عملگر دودویی $(*)$ روی مجموعه S شرکت پذیر است اگر داشته باشیم

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \text{به ازای همه مقادیر } x, y, z \in S$$

۳- اصل جابجایی: یک عملگر (*) روی یک مجموعه دارای خاصیت جابجایی است هرگاه

$$x * y = y * x \quad \text{به ازای هر } x, y \in S$$

۴- عنصر شناسه: مجموعه S نسبت به عملگر (*) روی مجموعه S دارای عنصر شناسه است، اگر عنصر $e \in S$ با خاصیت زیر موجود باشد.

$$e * x = x * e = x \quad \text{به ازای هر } x \in S$$

مثال: عنصر 0 یک عنصر شناسه نسبت به عملگر (+) روی مجموعه اعداد صحیح

$$I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ است، چون}$$

$$x + 0 = 0 + x = x \quad \text{به ازای هر } x \in I$$

مجموعه اعداد طبیعی N دارای عنصر شناسه نیست زیرا 0 جزو مجموعه نمی باشد.

۵- معکوس: مجموعه ای چون S با عنصر شناسه e نسبت به عملگر (*) دارای معکوس است به شرطی که برای هر $x \in S$ ، یک $y \in S$ وجود داشته باشد به نحوی که

$$x * y = e$$

مثال: در مجموعه اعداد صحیح I، با $e=0$ ، معکوس عنصر a برابر $(-a)$ است چون $a + (-a) = 0$

۶- اصل توزیع پذیری: اگر (*) و (.) دو عملگر روی مجموعه S باشند، (*) را روی (.) توزیع پذیر
گوییم هرگاه

$$x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z)$$

۲-۲ تعریف اصول اساسی جبر بول

جبر بول یک ساختار جبری است که با عناصر مجموعه، یعنی B ، همراه با دو عملگر دودویی $(+)$ و $(\cdot)$ تعریف می‌شود به شرطی که اصول زیر (هانتینگتون) در آن معتبر باشد.

۱- (a) مجموعه نسبت به عملگر $(+)$ بسته باشد.

(b) مجموعه نسبت به عملگر $(\cdot)$ بسته باشد.

۲- (a) یک عنصر شناسه 0 برای $(+)$ وجود داشته باشد.

(b) یک عنصر شناسه 1 برای $(\cdot)$ وجود داشته باشد.

۳- (a) مجموعه نسبت به $(+)$ دارای خاصیت جابجایی باشد: $x + y = y + x$

(b) مجموعه نسبت به $(\cdot)$ دارای خاصیت جابجایی باشد: $x \cdot y = y \cdot x$

۴- (a) نسبت به $(+)$ توزیع پذیر است: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

(b) نسبت به $(\cdot)$ توزیع پذیر است: $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + y)$

۵- برای هر عنصر $x \in B$ ، عنصری مثل $x' \in B$ وجود دارد (به آن متمم x می‌گوییم) به نحوی که:

$$(a) \quad x + x' = 1 \quad (b) \quad x \cdot x' = 0$$

۶- حداقل دو عنصر $x, y \in B$ وجود دارد به نحوی که $x \neq y$ باشد.

جبر بول دو ارزشی

جبر بول دو ارزشی روی مجموعه دو عنصری، $B = \{0, 1\}$ ، به همراه قوانین برای دو عملگر دودویی $(+)$ و $(\cdot)$ که در جدول زیر نشان داده شده تعریف می شود (قانون عملگر متمم برای تصدیق اصل ۵ است):

x	y	$x \cdot y$	x	y	$x + y$	x	x'
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

این قوانین دقیقاً مثل اعمال AND، OR و NOT در جدول ۸-۱ می باشند. اکنون نشان می دهیم که اصول هانتینگتون برای مجموعه $B = \{0, 1\}$ و دو عملگرهای دودویی که قبلاً تعریف شده اند، معتبر است.

۱- با توجه به جداول، بسته بودن کاملاً روشن است زیرا نتیجه هر عملگر 1 یا 0 بوده و $1, 0 \in B$ می باشند.

۲- با توجه به جداول می بینیم که $0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ (a)

$1.1 = 1$ $1.0 = 0.1 = 0$ (b)

این روابط بیانگر وجود عناصر شناسه 0 برای $(+)$ و 1 برای $(\cdot)$ ، طبق تعریف اصل ۲ می باشند.

۳- اصول جابجایی با توجه به تقارن جداول عملگرها آشکار است.

۴- (a) صحت اصل توزیع پذیری $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ را با ایجاد جدول برای تمام مقادیر ممکن x, y, z می توان تحقیق کرد. برای هر ترکیب، $x \cdot (y + z)$ را بدست آورده و نشان می دهیم که برابر $(x \cdot y) + (x \cdot z)$ است.

x	y	z	$y + z$	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$(x \cdot y) + (x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(b) صحت اصل توزیع پذیری (+) روی (.) را نیز می توان مثل بند قبل تحقیق نمود.

۵- با استفاده از جدول متمم، به سادگی می توان دید که:

$$(a) \quad x + x' = 1 \quad \text{زیرا} \quad 0 + 0' = 0 + 1 = 1 \quad \text{و} \quad 1 + 1' = 1 + 0 = 1 \quad \text{است}$$

$$(b) \quad x \cdot x' = 0 \quad \text{زیرا} \quad 0 \cdot 0' = 0 \cdot 1 = 0 \quad \text{و} \quad 1 \cdot 1' = 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{است، که اصل ۵ را تصدیق می کند.}$$

۶- اصل ۶ نیز صادق است زیرا جبر بول دو ارزشی دارای دو مقدار مجزای 0 و 1 با $1 \neq 0$ است.

جدول ۱-۲. اصول و تئوری‌های جبر بول

(b) $x \cdot 1 = x$	(a) $x + 0 = x$	اصل ۲
(b) $x \cdot x' = 0$	(a) $x + x' = 1$	اصل ۱
(b) $x \cdot x = x$	(a) $x + x = x$	تئوری ۱
(b) $x \cdot 0 = 0$	(a) $x + 1 = 1$	تئوری ۲
	$(x')' = x$	تئوری ۳ رجعت
(b) $xy = yx$	(a) $x + y = y + x$	اصل ۳ جابجایی
(b) $x(yz) = (xy)z$	(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$	تئوری ۴ شرکت پذیری
(b) $x + yz = (x + y)(x + z)$	(a) $x(y + z) = xy + xz$	اصل ۴ توزیع پذیری با بخش
(b) $(xy)' = x' + y'$	(a) $(x + y)' = x'y'$	تئوری ۵ دمورگان
(b) $x(x + y) = x$	(a) $x + xy = x$	تئوری ۶ جذب

دوگانی و قضیه دمورگان

اگر دوگان یک عبارت جبری موردنظر باشد تنها کافی است عملگرهای AND و OR تعویض و 0 ها به 1 و 1 ها به 0 تبدیل گردند.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

دو معادله اساسی قضیه دمورگان

تقدم عملگرها

در ارزیابی عبارات جبر بول تقدم اول با پرانتز، دوم با NOT، سوم با AND و چهارم با OR است. به بیان دیگر، عبارت داخل پرانتز باید قبل از سایر عملگرها ارزیابی شود. عملگر مقدم بعدی متمم است. پس از آن AND و بالاخره OR قرار دارد. به عنوان مثال، جدول درستی را برای تئوری دموورگان تشکیل می‌دهیم سمت چپ عبارت $(x + y)'$ است. بنابراین داخل پرانتز ابتدا ارزیابی می‌شود و سپس نتیجه متمم می‌گردد. سمت راست عبارت $x'y'$ است. بنابراین متمم x و y هر دو ابتدا ارزیابی شده و حاصل AND می‌گردد. توجه کنید که در محاسبات معمولی هم روال مشابهی (به جز برای متمم) برای ضرب و جمع به ترتیب به جای AND و OR برقرار است.

۲-۴ توابع بول

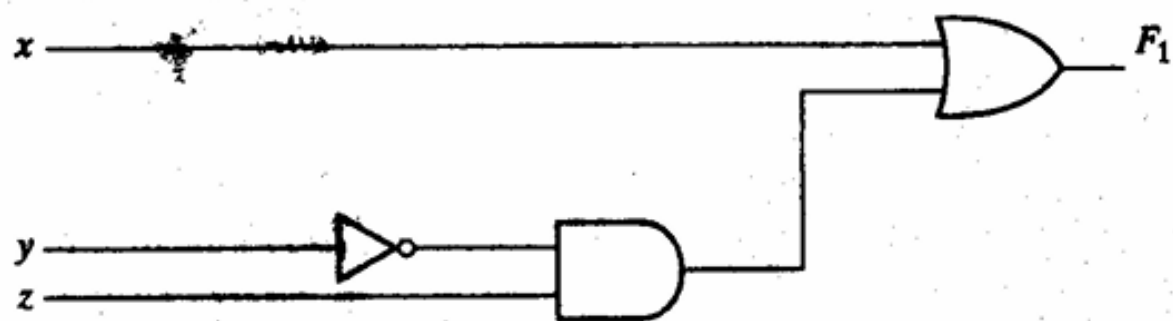
جبر بول جبری است که با متغیرهای دودویی و عملیات منطقی سروکار دارد. یک تابع به وسیله یک عبارت جبری متشکل از متغیرهای دودویی، ثابت‌های 0 و 1 و سمبل‌های عملیاتی منطقی تشکیل شده است. برای مقدار مفروضی از متغیرهای دودویی، تابع می‌تواند 1 یا 0 باشد. به عنوان مثال تابع بولی زیر را در نظر بگیرید:

$$F_1 = x + y'z$$

اگر x برابر 1 باشد و یا هر دو y' و z برابر 1 باشند تابع F_1 برابر 1 است. در غیر این صورت F_1 برابر 0 خواهد بود. عمل متمم، وقتی $y' = 1$ باشد، $y = 0$ را دیکته می‌کند. بنابراین، می‌توانیم بگوییم که اگر $x = 1$ یا اگر $y = 0$ و $z = 1$ باشد آنگاه $F_1 = 1$ خواهد بود. یک تابع بول رابطه‌ای منطقی را بین متغیرها بیان می‌کند. این تابع با تعیین مقدار دودویی عبارت برحسب همه مقادیر ممکن متغیرها ارزیابی می‌شود.

یک جدول بولی بصورت یک جدول درستی هم می تواند نشان داده شود. جدول درستی لیستی از 1 ها و 0 ها است که به متغیرهای دودویی تخصیص می یابد، و ستونی که مقدار نتایج را برای هر ترکیب نشان می دهد. تعداد سطرها در جدول درستی 2^n است، که n تعداد متغیرها در تابع است. ترکیبات دودویی برای جدول درستی از شمارش اعداد دودویی و از 0 تا $2^n - 1$ بدست می آید. جدول (۲-۲)، جدول درستی تابع F_1 را نشان می دهد. در این جدول هشت ترکیب دودویی ممکن برای تخصیص بیتی

x	y	z	F_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



شکل ۲-۱. پیاده سازی با گیت $F_1 = x + y'z$

مثال ۲-۲

متمم توابع $F_1 = x'yz' + x'y'z$ و $F_2 = x(y'z' + yz)$ را بدست آورید. متمم‌ها را با اعمال هر تعداد تئوری دمورگان بصورت زیر بدست آورید:

$$F'_1 = (x'yz' + x'y'z)' = (x'yz')'(x'y'z)' = (x + y' + z)(x + y + z')$$

$$\begin{aligned} F'_2 &= [x(y'z' + yz)]' = x' + (y'z' + yz)' = x' + (y'z')'(yz)' \\ &= x' + (y + z)(y' + z') \end{aligned}$$



فرم های استاندارد و متعارف

مینترم‌ها

یک متغیر دودویی ممکن است به فرم معمولی (x) یا متمم (x') ظاهر شود. اکنون تصور کنید که دو متغیر دودویی x و y با عملگر AND با هم ترکیب شوند. چون هر متغیر ممکن است به هر یک از دو شکل فوق ظاهر گردد، چهار ترکیب برای آنها متصور است: $x'y$ ، $x'y'$ ، xy و xy' . هر یک از این چهار جمله AND را یک مینترم یا یک جمله ضرب استاندارد گویند. بطور مشابه n متغیر را می توان ترکیب کرده و 2^n مینترم به وجود آورد. 2^n مینترم مختلف را می توان با روشی مشابه با آنچه در جدول ۳-۲ آمده، نشان داد. اعداد دودویی از صفر تا $2^n - 1$ زیر ستون n متغیر لیست شده اند. هر مینترم از AND تمام n متغیر بدست می آید که در آن هر متغیر پریم دار متعلق به بیت 0 و بدون پریم با 1 نشان داده می شود. سمبل هر مینترم نیز در

جدول با m_r نشان داده شده است. که در آن L معادل دهدهی عدد دودویی مربوط به مینترم است.

مینترم‌ها				
علامت	جمله	z	y	x
m_0	$x'y'z'$	0	0	0
m_1	$x'y'z$	1	0	0
m_2	$x'yz'$	0	1	0
m_3	$x'yz$	1	1	0
m_4	$xy'z'$	0	0	1
m_5	$xy'z$	1	0	1
m_6	xyz'	0	1	1
m_7	xyz	1	1	1

ما کسترم‌ها

به طریق مشابهی، n متغیر یک جمله OR تشکیل می‌دهند که هر متغیر ممکن است پریم‌دار یا بدون پریم باشد. 2^n ترکیب ممکن را ما کسترم یا جمع استاندارد گویند. هشت ما کسترم برای سه متغیر، همراه با سمبل آنها در جدول ۲-۳ لیست شده‌اند. هر 2^n ما کسترم برای n متغیر بطریق مشابهی حاصل می‌شود. هر ما کسترم از یک جمله OR با n متغیر بدست می‌آید که در آن متغیر پریم‌دار با 1 و بدون پریم با 0 نشان داده می‌شود. توجه کنید که هر ما کسترم، متمم مینترم مربوطه‌اش می‌باشد و بالعکس.

			ما کسترم‌ها	
x	y	z	جمله	علامت
0	0	0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	$x' + y' + z'$	M_7

x	y	z	میترم‌ها		ماکسترم‌ها	
			جمله	علامت	جمله	علامت
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

یک تابع بول می تواند بصورت جبری با استفاده از جدول درستی و با تشکیل مینترم های هر ترکیب از متغیرهایی که برای تابع، 1 را تولید می کنند، و اجرای عملگر روی OR همه این جملات ایجاد شود.

مثلاً f_1 در جدول ۲-۴ با ترکیبات 001، 100 و 111 بصورت $x'y'z$ ، $xy'z'$ و xyz بیان می شود. چون هر

جدول ۲-۴. توابع سه متغیره تابع f_1 تابع f_2

x	y	z	تابع f_1	تابع f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

یک از این مینترم ها $f_1 = 1$ را ایجاد می نمایند پس:

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

به سادگی می توان نشان داد که:

$$f_2 = x'yz + xy'z + xyz' + xyz = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

یعنی هر تابع بولی را می توان بصورت جمع مینترمها نشان داد "جمع به معنی OR جملات است".

اکنون متمم تابع بول را ملاحظه نمایید، می توان آن را با تشکیل مینترمهایی در جدول درستی که 0 تابع را تولید می کنند، ایجاد کرد و سپس آنها را OR نمود. متمم f_1 چنین است:

$$f_1' = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz'$$

اگر متمم f_1 را بدست آوریم تابع f_1 بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} f_1 &= (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z')(x' + y' + z) \\ &= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6 \end{aligned}$$

بطور مشابه، می توان عبارت f_2 را از جدول بدست آورد:

$$\begin{aligned} f_2 &= (x + y + z)(x + y + z')(x + y' + z)(x' + y + z) \\ &= M_0 M_1 M_2 M_4 \end{aligned}$$

این مثالها نیز دومین خاصیت جبر بول را به نمایش می گذارند: هر تابع بول را می توان بصورت ضرب ماکسترمها (ضرب به معنی AND است) در آورد. روال تهیه ضرب ماکسترمها مستقیماً از جدول درستی به فرم زیر میسر است. برای هر ترکیبی از متغیرها ماکسترمهایی که در تابع 0 تولید می کنند را تشکیل دهید، و سپس AND همه ماکسترمها را بدست آورید. توابع بول که بصورت جمع مینترمها یا ضرب ماکسترم بیان شوند را فرم متعارف نامند.

مجموع مینترم‌ها

قبلاً بیان شد که برای هر n متغیر دودویی 2^n مینترم مجزا وجود دارد و هر تابع بولی می‌تواند بصورت مجموعی از مینترم‌ها در آید. مینترم‌هایی که جمع آنها توابع بول را تعریف می‌کنند، آنهایی هستند که 1 های تابع را در جدول درستی تشکیل می‌دهند. چون تابع در قبال هر مینترم می‌تواند 0 و یا 1 باشد، و چون 2^n مینترم وجود دارد، می‌توان تعداد توابع ممکن که با n متغیر ایجاد می‌شود را 2^{2^n} دانست. گاهی بهتر است تابع بول را برحسب جمع مینترم‌ها بیان کنیم. اگر در این فرم نبود، می‌توان ابتدا آن را بصورت جمع جملات AND در آورد. آنگاه هر ترم برای یافتن همه متغیرها در آن واریسی می‌شود. اگر یک یا چند متغیر وجود نداشته باشند، می‌توان جمله را در عبارتی مثل $x + x'$ ، AND نمود، که x یکی از متغیرهای مفقود شده است. مثال زیر مطلب را روشن می‌کند.

تابع بولی $F = A + B'C$ را بصورت جمع مینترم‌ها در آورید. تابع سه متغیر A ، B و C دارد. در اولین جمله A ، دو متغیر مفقود است؛ بنابراین:

$$A = A(B + B') = AB + AB'$$

این تابع هنوز هم یک متغیر کسر دارد

$$\begin{aligned} A &= AB(C + C') + AB'(C + C') \\ &= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' \end{aligned}$$

جمله دوم $B'C$ یک متغیر کم دارد

$$B'C = B'C(A + A') = AB'C + A'B'C$$

با ترکیب همه جملات داریم:

$$\begin{aligned} F &= A + B'C \\ &= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'B'C \end{aligned}$$

دیده می‌شود که $AB'C$ دوبار تکرار شده است و برحسب تئوری ($x + x = x$) می‌توان یکی از آنها را حذف کرد. با مرتب نمودن مینترم‌ها به ترتیب صعودی داریم:

$$\begin{aligned} F &= A'B'C + AB'C + AB'C + ABC' + ABC \\ &= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 \end{aligned}$$



گاهی بهتر است تابع بول را وقتی بصورت جمع مینترم‌هاست به فرم خلاصه زیر نشان دهیم:

$$F(A, B, C) = \sum(1, 4, 5, 6, 7)$$

سمبل جمع $\sum$ به معنی OR جملات است؛ اعدادی که به دنبال آن می‌آیند نیز مینترم‌های تابع هستند.

ضرب ما کستردها

هر یک از 2^{2^n} تابع متشکل از n متغیر را می توان بصورت ضرب ما کستردها نیز بیان داشت. برای بیان توابع بول به عنوان ضرب ما کستردها، ابتدا باید جملات OR را تشکیل دهیم. این کار را می توان با استفاده از قانون توزیع پذیری $x + yz = (x + y)(x + z)$ انجام داد. سپس هر متغیر مفقود در هر جمله OR با xx' ، OR می شود.

تابع بول $F = xy + x'z$ را بصورت ضرب جملات ماکسترم نشان دهید. ابتدا تابع را با استفاده از اصل توزیع پذیری به فرم جملات OR در آورید:

$$\begin{aligned} F &= xy + x'z = (xy + x')(xy + z) \\ &= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\ &= (x' + y)(x + z)(y + z) \end{aligned}$$

تابع سه متغیر دارد: x ، y و z . هر جمله OR فاقد یک متغیر است؛ بنابراین

$$\begin{aligned} x' + y &= x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z') \\ x + z &= x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z) \\ y + z &= y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z) \end{aligned}$$

با ترکیب همه جملات و حذف تکراری‌ها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F &= (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z') \\ &= M_0 M_2 M_4 M_5 \end{aligned}$$

نمایش ساده‌تر به شکل زیر است:

$$F(x, y, z) = \Pi(0, 2, 4, 5)$$

سمبل ضرب، Π ، بیانگر AND ماکسترم‌هاست. اعداد داخل پرانتز شماره ماکسترم‌های تابع‌اند.



تبدیل فرم‌های متعارف به یکدیگر

متمم یک تابع که بصورت مجموع مینترم‌ها نشان داده شده برابر است با مجموع مینترم‌هایی که در تابع اصلی وجود ندارند. دلیل این است که تابع اصلی با آن دسته از مینترم‌ها بیان شده است که تابع را 1 می‌کنند، در صورتی که متمم آن در ازاء مینترم‌هایی 1 می‌شود که تابع را 0 نموده‌اند. به عنوان مثال تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$$

متمم این تابع به شکل زیر است:

$$F'(A, B, C) = \Sigma(0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

اکنون اگر متمم F' را با روش تئوری دموورگان بدست آوریم، F را به فرم متفاوتی خواهیم داشت:

$$F = (m_0 + m_2 + m_3)' = m'_0 \cdot m'_2 \cdot m'_3 = M_0 M_2 M_3 = \Pi(0, 2, 3)$$

آخرین تبدیل در رابطه فوق از تعریف مینترم‌ها و ماکسترم‌ها در جدول (۳-۲) حاصل می‌شود. با توجه به جدول درستی رابطه زیر معتبر است:

$$m'_j = M_j$$

یعنی ماکسترم زام، متمم مینترم زام است و بالعکس.

یک تابع بولی می‌تواند از یک عبارت جبری به کمک جدول درستی و روال تبدیل متعارف به ضربی از ماکسترم‌ها تبدیل شود. به عنوان مثال عبارت بولی زیر را ملاحظه نمایید.

$$F = xy + x'z$$

ابتدا جدول درستی تابع را طبق جدول ۶-۲ بدست می‌آوریم. ۱‌های زیر ستون F از ترکیب $xy = 11$ یا $xz = 01$ بدست می‌آیند. مینترم‌های تابع در جدول درستی شماره‌های ۱، ۳، ۶ و ۷ می‌باشند. تابع برحسب مجموع مینترم‌ها چنین است:

$$F(x, y, z) = \sum(1, 3, 6, 7)$$

جدول ۶-۲. جدول درستی برای $F = xy + x'z$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

چون جمعاً در یک تابع از سه متغیر هشت مینترم یا ماکسترم وجود دارد، جملات مفقود عبارتند از ۰، ۲، ۴ و ۵. تابعی که برحسب ضرب ماکسترم‌ها بیان شود برابر زیر است:

$$F(x, y, z) = \prod(0, 2, 4, 5)$$

فرم‌های استاندارد

دو نمایش متعارف جبر بول، فرم‌های اصلی تابع‌اند که هر کس می‌تواند با توجه به جدول درستی به آنها دسترسی پیدا کند. این فرم‌ها معمولاً دارای حداقل متغیرها نیستند زیرا هر مینترم یا ماکسترم باید بنا به تعریف دارای تمام متغیرها اعم از متمم یا غیرمتمم باشد.

راه دیگری برای بیان تابع بول، فرم استاندارد است. در این فرم، جمله‌هایی که تابع را تشکیل می‌دهند ممکن است یک، دو یا هر تعدادی از متغیرها را دارا باشند. دو نوع فرم استاندارد وجود دارد. یکی جمع حاصلضرب‌ها و دیگری ضرب حاصل جمع‌ها.

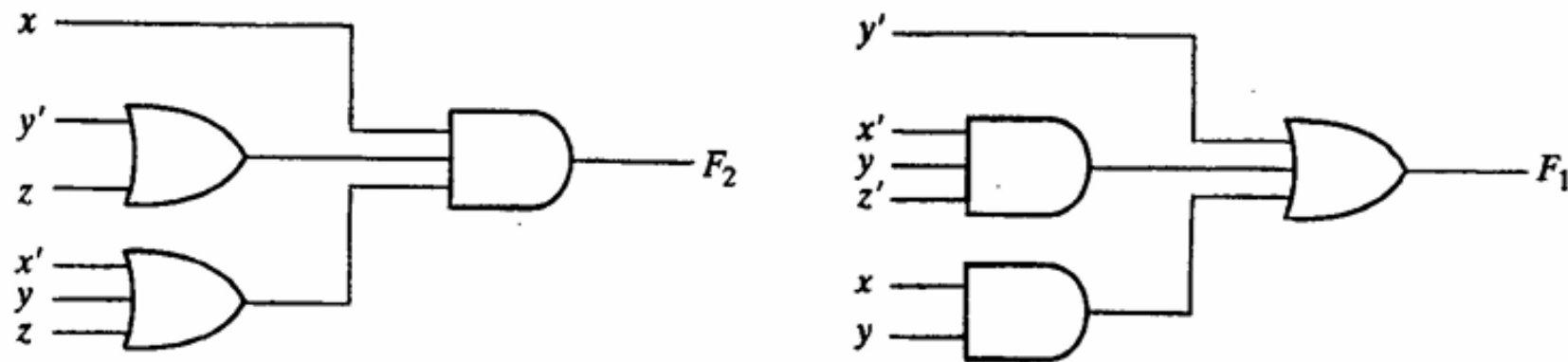
جمع حاصلضرب‌ها، یک عبارت بولی است شامل جملات AND که آنها را جملات ضرب می‌گوییم و هر یک دارای یک یا چند لیترال است. علامت جمع به معنی OR این جملات است. مثالی از یک تابع بصورت جمع حاصلضرب‌ها را در زیر ملاحظه نمایید.

$$F_1 = y' + xy + x'yz'$$

این عبارت سه جمله، با یک، دو و سه لیترال دارد. جمع آنها اثر OR را داراست.

نمودار منطقی جمع حاصلضرب‌ها متشکل از گروهی گیت AND است که بدنبال آن یک گیت OR می‌آید. الگوی این آرایش در شکل ۲-۳ (الف) آمده است. هر جمله ضرب نیاز به یک گیت AND دارد. این نکته در یک ورودی تک لیترالی مستثنی است. جمع منطقی با یک گیت OR صورت می‌گیرد که ورودی‌هایش خروجی گیت‌های AND و نیز تک ورودی مذکور است. ضمناً فرض بر این است که متمم متغیرهای ورودی مستقیماً موجودند بنابراین وارونگر در نمودار لحاظ نشده است. این آرایش را پیاده‌سازی دو سطحی یا دو طبقه می‌گویند.

ضرب حاصل جمع‌ها، یک عبارت بولی حاوی جملات OR است که به آن جملات جمع می‌گویند.



(ب) ضرب حاصل جمع‌ها

(الف) جمع حاصلضرب‌ها

شکل ۲-۳. پیاده‌سازی دو سطحی

۲-۶ دیگر اعمال منطقی

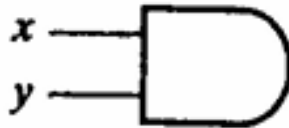
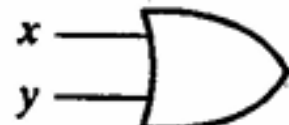
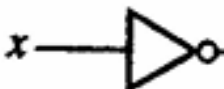
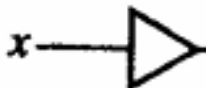
وقتی که عملگرهای AND و OR بین دو متغیر x و y قرار می‌گیرند، به ترتیب دو تابع بولی $x.y$ و $x+y$ را تشکیل می‌دهند. قبلاً بیان شد که برای n متغیر 2^{2^n} تابع دودویی وجود دارد. برای دو متغیر، $n=2$ و تعداد توابع بولی ممکن 16 است. بنابراین توابع AND و OR تنها دو تابع از 16 تابع ممکن با دو متغیر دودویی هستند. پیشنهاد می‌گردد 14 تابع باقیمانده مشخص شده و راجع به خصوصیت آنها تحقیق گردد. جدول درستی 16 تابع که با دو متغیر دودویی x و y تشکیل گردیده در جدول ۲-۷ لیست شده

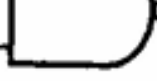
جدول ۲-۷. جدول درستی برای 16 تابع از دو متغیر دودویی

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

است. هر یک از 16 ستون F_0 و F_{15} ، جدول درستی یک تابع ممکن برای دو متغیر x و y را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که توابع از 16 ترکیب ممکن تخصیص یافته به F معین می‌گردند. 16 تابع را می‌توان با توابع بول نشان داد. این توابع در ستون اول جدول ۲-۸ دیده می‌شوند. عبارات بولی از نظر تعداد لیترال حداقل شده‌اند.

توابع بول	سمبل عملگر	نام	توضیحات
$F_0 = 0$		Null	Binary constant 0
$F_1 = xy$	$x \cdot y$	AND	x and y
$F_2 = xy'$	x/y	Inhibition	x , but not y
$F_3 = x$		Transfer	x'
$F_4 = x'y$	y/x	Inhibition	y , but not x
$F_5 = y$		Transfer	y
$F_6 = xy' + x'y$	$x \oplus y$	Exclusive-OR	x or y , but not both
$F_7 = x + y$	$x + y$	OR	x or y
$F_8 = (x + y)'$	$x \downarrow y$	NOR	Not-OR
$F_9 = xy + x'y'$	$(x \oplus y)'$	Equivalence	x equals y
$F_{10} = y'$	y'	Complement	Not y
$F_{11} = x + y'$	$x \subset y$	Implication	If y , then x
$F_{12} = x'$	x'	Complement	Not x
$F_{13} = x' + y$	$x \supset y$	Implication	If x , then y
$F_{14} = (xy)'$	$x \uparrow y$	NAND	Not-AND
$F_{15} = 1$		Identity	Binary constant 1

نام	سمبل گرافیکی	تابع جبری	جدول درستی														
AND	 $F = xy$	<table> <tr> <th>x</th> <th>y</th> <th>F</th> </tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	x	y	F	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
x	y	F															
0	0	0															
0	1	0															
1	0	0															
1	1	1															
OR	 $F = x + y$	<table> <tr> <th>x</th> <th>y</th> <th>F</th> </tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	x	y	F	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
x	y	F															
0	0	0															
0	1	1															
1	0	1															
1	1	1															
Inverter	 $F = x'$	<table> <tr> <th>x</th> <th>F</th> </tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	x	F	0	1	1	0									
x	F																
0	1																
1	0																
Buffer	 $F = x$	<table> <tr> <th>x</th> <th>F</th> </tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	x	F	0	0	1	1									
x	F																
0	0																
1	1																

NAND	 x y F $F = (xy)'$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th><th>y</th><th>F</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	x	y	F	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
x	y	F															
0	0	1															
0	1	1															
1	0	1															
1	1	0															
NOR	 x y F $F = (x + y)'$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th><th>y</th><th>F</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	x	y	F	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
x	y	F															
0	0	1															
0	1	0															
1	0	0															
1	1	0															
Exclusive-OR (XOR)	 x y F $F = xy' + x'y$ $= x \oplus y$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th><th>y</th><th>F</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	x	y	F	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
x	y	F															
0	0	0															
0	1	1															
1	0	1															
1	1	0															
Exclusive-NOR or equivalence	 x y F $F = xy + x'y'$ $= (x \oplus y)'$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th><th>y</th><th>F</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	x	y	F	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
x	y	F															
0	0	1															
0	1	0															
1	0	0															
1	1	1															

مدار NOT یا وارونگر وضعیت منطقی یک متغیر دودویی را

معکوس می‌نماید و در واقع متمم متغیر را تولید می‌کند. دایره کوچک در خروجی سمبل گرافیکی یک وارونگر (که به آن حباب می‌گویند) بیانگر متمم شدن است. سمبل مثبت به تنهایی علامت بافر می‌باشد. یک بافر عمل انتقال را انجام می‌دهد، ولی یک عمل منطقی تولید نمی‌کند زیرا مقدار دودویی خروجی برابر مقدار ورودی است. این مدار صرفاً در تقویت توان سیگنال‌ها استفاده شده و معادل با دو مدار متوالی وارونگر (معکوس‌گر) است.

تابع NAND متمم AND است و همانطور که از سمبل گرافیکی آن مشخص است از یک سمبل AND و یک حباب تشکیل شده است. تابع NOR هم متمم OR است و با یک سمبل OR و به دنبال آن یک حباب نمایش داده می‌شود. گیت‌های NAND و NOR بطور گسترده‌ای به عنوان گیت‌های استاندارد مورد استفاده قرار گرفته و بیشتر از OR و AND مورد توجه‌اند. این بدان علت است که گیت‌های NAND و NOR به سادگی به وسیله مدارات ترانزیستوری قابل تولید بوده و می‌توان به راحتی توابع بول را با آنها پیاده‌سازی کرد.

گیت XOR دارای سمبل مشابهی با OR است، بجز اینکه یک خط منحنی در سمت ورودی‌اش کشیده شده است. گیت XNOR متمم XOR است و لذا حباب کوچکی در خروجی آن وجود دارد.