

بسمه تعالی

آیه ۳ سوره طلاق:

وَيَرْزُقُهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ وَمَنْ يَتَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ فَهُوَ حَسْبُهُ إِنَّ اللَّهَ بَالِغُ أَمْرِهِ قَدْ جَعَلَ اللَّهُ لِكُلِّ شَيْءٍ قَدْرًا

و از جایی که گمان نبرد به او روزی عطا کند، و هر که بر خدا توکل کند خدا او را کفایت خواهد کرد که خدا امرش را نافذ و روان می‌سازد و بر هر چیز قدر و اندازه‌ای مقرر داشته است.

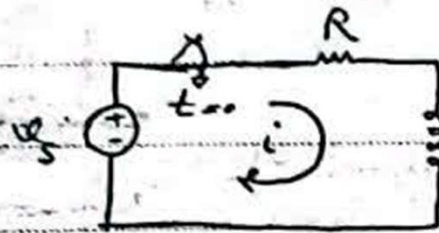
فصل دوم

مدارات مرتبه اول RC و RL



مدارهای مرتبه اول (RL, RC)

بنویشتن KVL و KCL در مدارهای RL و RC یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌دهیم. همین‌طور این مدارها را مدارهای مرتبه اول می‌نامند. به عنوان مثال مدار زیر را در نظر بگیرید:



$$t \geq 0 \text{ KVL: } -U_s + Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{U_s}{L}} \quad \text{معادله دیفرانسیل مرتبه اول}$$



یادآوری: حل معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی یک با ضرایب ثابت

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{I}x = k \quad \text{ثابت}$$

الف) جواب همگن (تخلیه):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{I}x = 0 \rightarrow x_h = Ae^{st}$$

$$\text{ب) قرار دادن در معادله: } \frac{d}{dt}(Ae^{st}) + \frac{1}{I}(Ae^{st}) = 0$$

$$\Rightarrow Ae^{st}\left(s + \frac{1}{I}\right) = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{I}$$

$$x_h = Ae^{-\frac{t}{I}}$$

ب) جواب خصوصی

$$x_p = k_f \quad \text{ثابت}$$

$$\frac{d}{dt}(k_f) + \frac{1}{I}k_f = k \Rightarrow k_f = kI$$

پایان جواب کلی: $x(t) = x_p + x_h = A e^{-t/\tau_c} + k_c$

- برای پیدا کردن ضریب مجهول A از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم $(x(0))$

$$t=0 \Rightarrow x(0) = A e^0 + k_c \Rightarrow A = x(0) - k_c$$

$$\Rightarrow x(t) = [x(0) - k_c] e^{-t/\tau_c} + k_c$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = k_c \quad \text{چون}$$

پایان k_c علامت رتبه‌ی کف و $x(\infty)$ نشان می‌دهیم. در نتیجه:

$$x(t) = [x(0) - x(\infty)] e^{-t/\tau_c} + x(\infty)$$

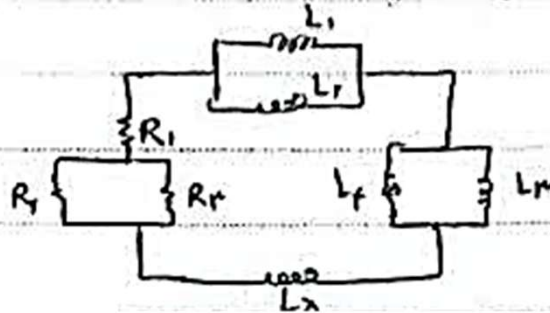
مانند به رابطه‌ی فوق برای حل مسائل این فصل، τ_c و $x(\infty)$ به مقدار x_0 و x_{∞} و k_c را بدست آورده و در جو رابطه‌ی فوق قرار می‌دهیم.

مدارهای این فصل به صورت ترکیب یک مقاومت با یک سلف و یک مقاومت با یک خازن است



مدار RL مدار RC

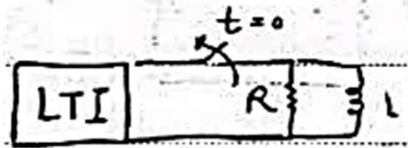
البته مدارهای فوق R ، L و C می توانند نمایندگی یک مجموعه ای باشند یعنی مدارری نیز یک مدار سری اول است



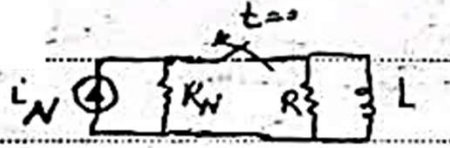
$$\left\{ \begin{array}{l} R = R_1 + (R_r // R_f) \\ L = L_x + (L_1 // L_2) + (L_r // L_f) \end{array} \right.$$

پاسخ ورودی صفر: منظور از پاسخ ورودی صفر یعنی این که می خواهیم جریان سلف و یا ولتاژ خازن را
 هنگامی بدست آوریم که منبع انرژی بدون مدار متصل نیست (ورودی صفر) بلکه سلف مقدار
 جریان اولیه و خازن مقداری ولتاژ اولیه دارد.

سلف: پاسخ ورودی صفر مدل RL



با قلم بردن معادل نوین شکلی LTI داریم.



مدل فوق را در بازه‌ی زمانی $t > 0$ داریم که می بینیم.

• زمانهای • t_N (خطی وصل بوده)

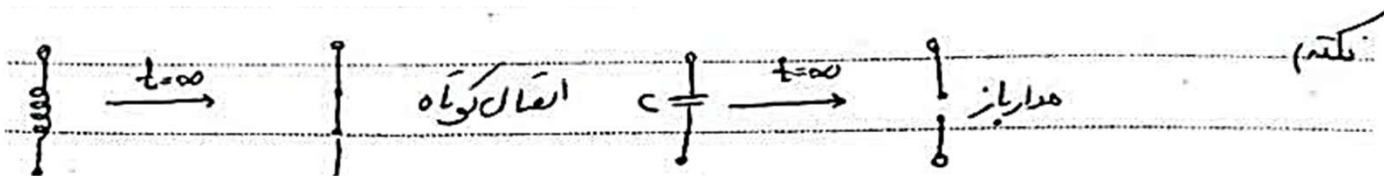


t_N همان جا که مقدار ثابت مدار را بدست زمان
 تقییمی در جریان ها و ولتاژهای مدار داریم. بنابراین:

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\varphi_C}{dt} = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow r_L = L \frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow \text{سلف اتصال کوتاه}$$

$$\frac{d\varphi_C}{dt} = 0 \Rightarrow i_C = C \frac{d\varphi_C}{dt} = 0 \Rightarrow \text{خازن مدار باز}$$

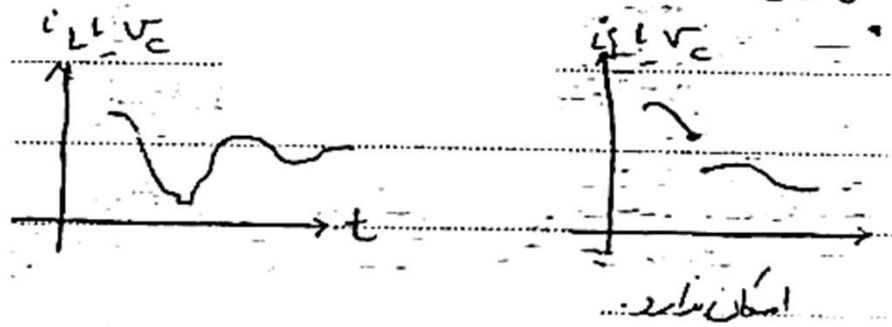


از آن جایی که فرض می‌کنیم که از ابتدا مدار برده است. بنابراین در لحظه‌ای $t = 0^-$ (یعنی لحظه قبل از وصل شدن منبع) زمان گذشته است. و سطح اتصال کوتاه شده است.



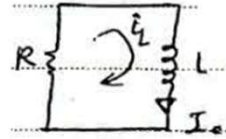
$I_0 = i_N$ جریان اولیه

نکته: در شرایط عادی جریان سلف و ولتاژ خازن پیوسته هستند زیرا در غیاب این صورت در ولتاژ خازن و جریان سلف تابع ضرب اتفاق می‌افتد.



$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_N$

• زمان‌های $t > 0$ (کپیداناس)



$$KVL: v_R + v_L = 0$$

$$R i_L + L \frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = 0 \quad \text{که } i_L(0) = I_0$$

می‌دانیم: $i_L(t) = A e^{\alpha t}$

جایگزینی:

$$A \alpha e^{\alpha t} + \frac{R}{L} (A e^{\alpha t}) = 0$$

$$\Rightarrow A e^{\alpha t} \left(\alpha + \frac{R}{L} \right) = 0$$

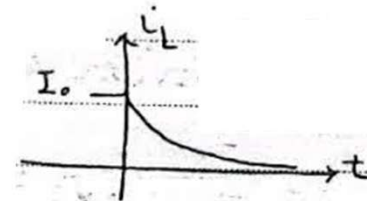
$$\Rightarrow \alpha = -\frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = A e^{-\frac{R}{L} t}$$

برای بدست آوردن ضریب مجهول A مقدار اولیه استفاده می‌کنیم

$$t=0 \Rightarrow i_L(0) = I_0 = A e^0 \Rightarrow A = I_0$$

$$\Rightarrow i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$



* $x(t) = [x_0 - x(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty)$ به صورت اول به صورت

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x = k$$

می توانست جواب را به این آید که حل معادله دیفرانسیل و با جایگزینی در رابطه می * به دست آورد

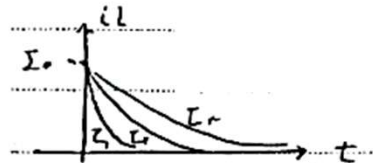
$$x(\infty) = \infty$$

$$x(0) = I_0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}$$

$$i_L(t) = I_0 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

تعریف ثابت زمانی τ در مدارهای RL همیشه برابر مقدار $\frac{L}{R}$ است ثابت زمانی می نویسد
 $i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Leftarrow \tau = \frac{L}{R}$

هر چه مقدار ثابت زمانی بزرگتر باشد مدار دیرتر به مقدار پایدار خود خواهد رسید



$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$$

هر توان نشان داده مدارهای جدیدی اول مدار بعد از تقریباً $\frac{1}{2}$ ثابت زمان به مدارهای خود می رسند

$$i_L = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$t = \tau \quad i_L = I_0 e^{-1} = 0.37 I_0$$

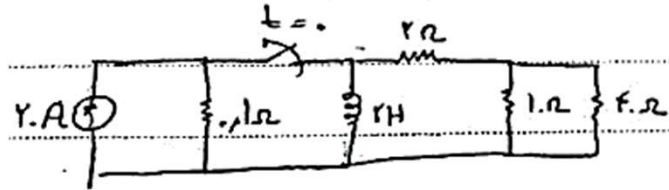
$$t = 2\tau \quad i_L = I_0 e^{-2} = 0.14 I_0$$

$$t = 4\tau \quad i_L = I_0 e^{-4} = 0.02 I_0 \approx 0 \quad \text{مقدار بسیار کم}$$

نکته: در مدارهای جدید اول بهتر است در ابتدا جریان صاف و ولتاژ بارزن را به دست آورده، سپس از روی آن ها شاخص متغیرهای مدار را مقایسه کنیم

مثال) در مدار شکل زیر یک دیسک پورده است. ولتاژی $t > 0$ باز می شود. مطلوب است

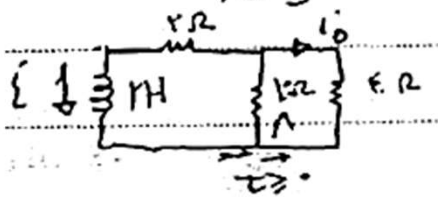
الف) جریان i_L ب) توان تلف شده در مقاومت 4Ω



چون برای $t > 0$ منبع در مدار نداریم بنابراین $i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ و الف

• محاسبه I_0 : برای محاسبه I_0 من رانیم $(t=0)$ که دیسک پورده است و تلف اتصال کوتاه شده است. در نتیجه $I_0 = 2A$

• محاسبه τ : برای محاسبه τ باید مدار را در $t > 0$ در نظر گرفت. من رانیم $\tau = \frac{L}{R}$



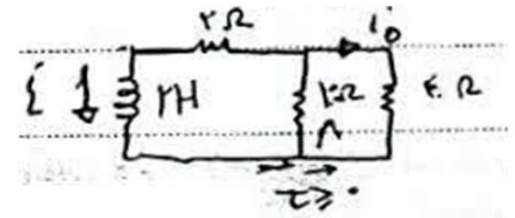
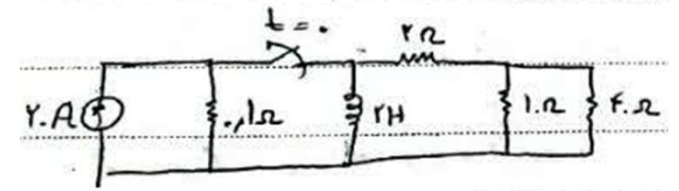
$$R = (6 // 4.0) + 2 = 1.0 \Omega$$

$$\tau = \frac{1}{1.0} = 1$$

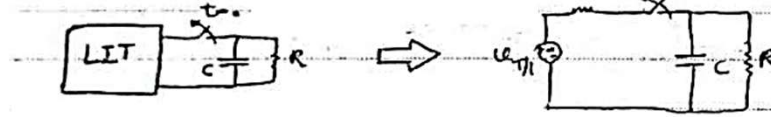
$$i_L(t) = 1.0 e^{-t} \quad t \geq 0$$

$$i_0 = \frac{1.0}{1.0 + 4.0} i_L = -4 e^{-t} \quad t \geq 0$$

$$P_{4.0} = 4.0 (i_0)^2 = 4.0 (12 e^{-1.0 t})$$

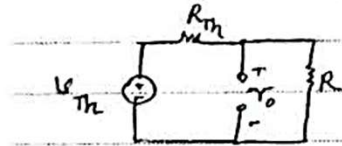


برای پاسخ در درایه صفری مدار RC:



• $t = 0$ (کلید بسته):

چون به بهایست نهان گذشته، برای این خازن مدار از صفر شروع می‌شود.



در لحظه اولی: $V_{th} = V_o$ ، $V_c(0) = \frac{R}{R+R_{th}} V_{th}$ مقسم و باز:

$$KCL: i_R + i_C = 0$$

$$\frac{V_c}{R} + C \frac{dV_c}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{RC} V_c = 0$$

• $t > 0$ (کلید باز):

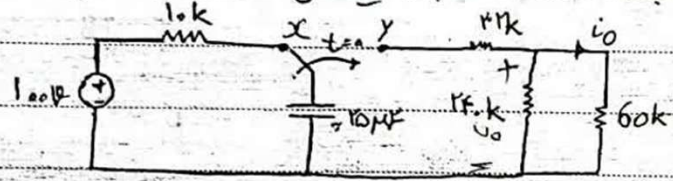
$$\Rightarrow V_c = V_o e^{-\frac{t}{RC}}$$

جمع بندی:

برای پاسخ در درایه صفری:

$$\begin{cases}
 I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \tau = \frac{L}{R} & \text{مدار RL} \\
 V_o e^{-\frac{t}{\tau}}, \tau = RC & \text{مدار RC}
 \end{cases}$$

مثال) در مدار زیر کپاسیتورها در وضعیت x بوده در $t=0$ به وضعیت y می رود مطلوب است



الف) $i_o(t)$

ب) $v_o(t)$

ج) $i_o(t)$

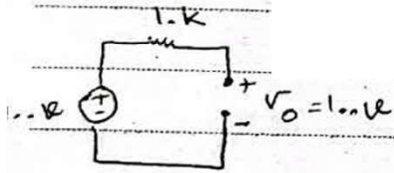
م کل انرژی تلف شده در مقاومت $60k\Omega$

د) الف

چون در $t > 0$ مسیفر در وضعیت y می باشد پس $v_o(t) = 1.0e^{-t/\tau}$

محاسبه v_o :

در این حالت کپاسیتور وضعیت x بوده و مدار به این صورت است



محاسبه τ : در $t > 0$ کپاسیتور به وضعیت y می باشد پس



$$R = (32k \parallel 60k) + 24k = 18k$$

$$\Rightarrow \tau = (0.018 \times 10^{-3}) (18 \times 10^3) = 4 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau} = 250$$

$$\Rightarrow v_o(t) = 1.0e^{-250t} \quad t \geq 0$$

$$v_{oc}(t) = \frac{(24 // 4)}{(24 // 4) + 22} \times 12e = 4e^{-25t} \quad t \geq 0 \quad \text{ج} \quad v_{oc}(t)$$

مستقیم

دقت کنید که تنها ولتاژ دوسر مداران و جریان عبوری از یخچال پیوسته هستند و ممکن مثال
 در این مثال ولتاژ دوسر مدار است ۲۴ k پیوسته نیست زیرا

$$\begin{aligned}
 v_o(0^-) &= 0 \\
 v_o(0^+) &= 24 \times e^{-0} = 24 \\
 \Rightarrow v_o(0^-) &\neq v_o(0^+)
 \end{aligned}$$

$$i_o = \frac{v_o}{4k} = e^{-25t} \text{ mA} \quad t \geq 0 \quad \text{د}$$

$$p_{ck} = 24 \times i_o^2 = 60e^{-50t} \text{ mW} \quad t \geq 0 \quad \text{د}$$

$$\Rightarrow w_{ck} = \int_0^{\infty} p_{ck} dt = 1.2 \text{ mJ}$$

مدارهای اجنبی ثابت زمانی:

تا این جا مدارهایی را بررسی کردیم که در آن ها تنها یک عنصر غیر وضعیتی می داد. اگر یک عنصر جوی زمان صفر در زمان t_0 جابجاشود خواهیم داشت:

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} \quad t \geq t_0$$

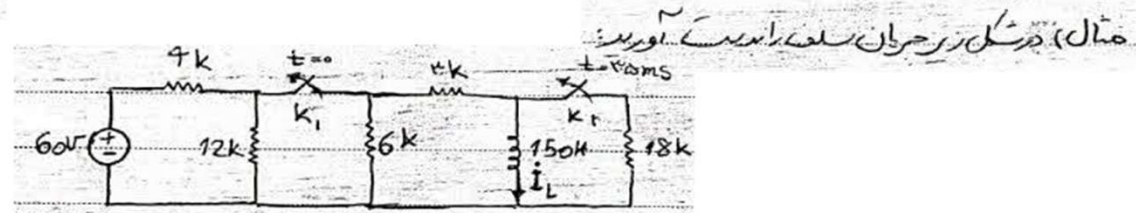
$$v_C(t) = v_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} \quad t \geq t_0$$

در مدارهایی که چند عنصر وجود دارد در یک یک عنصر جابجاشودیم جای یک ثابت زمانی چند ثابت زمانی خواهیم داشت:

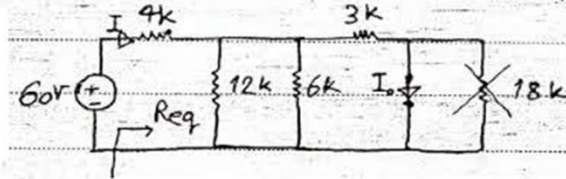
نکته ۱) در این گونه مدارها باید مدار را در فاصله زمانی بین یک عنصر زین ها جدا گانه تحلیل کنیم

نکته ۲) در هر بازه ای زمانی فرض می کنیم مدار را با یک تقی می کنند (یعنی یک عنصر زین بعدی را در نظر نمی گیریم) و معادله یک بعدیت می آوریم.

نکته ۳) معادله های هر مرحله (زمانی یک عنصر زین بعدی) همان معادله اولیه برای مرحله ی بعد خواهد بود.



① $t < 0$ → در وضعیت سلف اتصال کوتاه



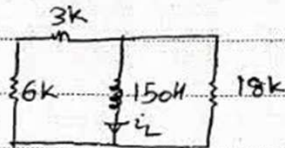
$$R_{eq} = 4 + (3 // 6 // 12) k$$

$$I = \frac{60}{R_{eq}} = 10.5 \text{ mA}$$

مقدار جریان: $I_0 = \frac{6 // 12}{(6 // 12) + 3} I = 6 \text{ mA}$

② $0 < t < 35 \text{ ms}$

طریقه K_1 باز و K_2 بسته



$$I_1 = \frac{L}{R_{eq1}} \rightarrow R_{eq1} = (6 + 3) // 18 = 6 k$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{150}{6k} = 0.025 \Rightarrow \frac{1}{\tau} = 90 \rightarrow i_L(t) = 6 e^{-90t} \text{ mA}$$



$$t = 35\text{ms} \Rightarrow i_L(35\text{ms}) = 6 e^{-90 \times 35 \times 10^{-6}} = 1.98 \text{ mA}$$

مقدار اولیه‌ی سولیس یکدی



در یک لحظه $t > 35\text{ms}$ ③

$$\tau_2 = \frac{L}{R_{eq2}} \quad R_{eq2} = 6 + 3 = 9\text{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau_2} = 60$$

$$i_L(t) = 1.98 e^{-60(t-35\text{ms})} \text{ mA}$$

۲- پاسخ حالت صفر: در سمت ① پاسخ ورودی به صفر را داریم منظور از پاسخ حالت صفر این است که سلف و یا خازن جریان و ولتاژ اولیه ندارند و خروجی تنها به خاطر منبع ورودی است که از زمان $t=0$ در مدار قرار گرفته است.

الف) پاسخ حالت صفر مدار RC : وقتی کپاسیتور است منبعی در مدار وجود ندارد یا باز شدن کپاسیتور به مدار تریق می شود چون پاسخ حالت صفر است. مدار ولتاژ اولیه نیز صفر خواهد بود.
 $V_C(0) = V_o = 0$



$$\Rightarrow \frac{V_C}{R} + C \frac{dV_C}{dt} = I_s$$

$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C = \frac{I_s}{C}$$

جواب کلی: $V = V_h + V_p$

جواب همگن: $V_h = k_1 e^{st}$

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{RC} v_c = 0$$

$$\text{فرض کنیم: } k_1 s e^{st} + \frac{1}{RC} k_1 e^{st} = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{RC} \Rightarrow v_h = k_1 e^{-t/RC}$$

$$\text{فرض کنیم: } v_p = k_2$$

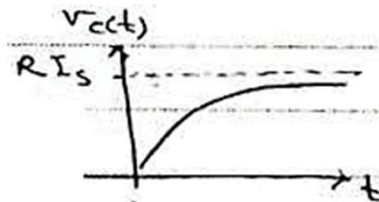
$$\text{فرض کنیم: } 0 + \frac{1}{RC} k_2 = \frac{I_s}{C} \Rightarrow k_2 = RI_s$$

$$\Rightarrow v = v_h + v_p = k_1 e^{-t/RC} + RI_s$$

$$t=0 \Rightarrow v(0) = k_1 + RI_s = 0 \quad \text{با توجه به}$$

$$\Rightarrow k_1 = -RI_s$$

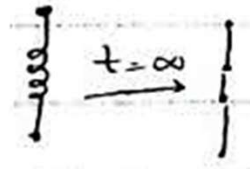
$$\Rightarrow v_c(t) = RI_s (1 - e^{-t/RC})$$

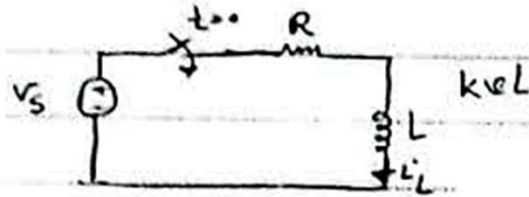


نکته: با توجه به این که مقدار بارهای مدار RC فوق RI_s شد می توان این طور تحلیل کرد که در $t = \infty$ خازن مدار بارز شده و تمام جریان عبوری I_s از مقاومت R می گذرد.



م. مطابق آ به می توان گفت که سلف در پس نهایت اتصال کوتاه می شود.





ساختار مدار RL :

$$v_s = v_R + v_L$$

$$\Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{v_s}{L}$$

با توجه به نکته می‌توان در $t = \infty$ سلف افعال کوتاه شده داریم :

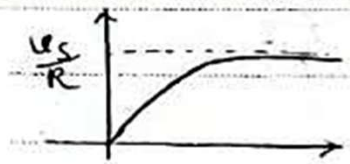
$$i_L(\infty) = \frac{v_s}{R}$$

با توجه به رابطه :

$$i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)] e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$$

چون $i_L(0) = 0$ و $\tau = L/R$ داریم :

$$i_L(t) = \frac{v_s}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad t \geq 0$$



۳- پاسخ کامل: در حالت کلی سلف و اجازین می توانند دارای مقادیری اولیه بوده و منابع نیز به آن ها وصل شود بنابراین

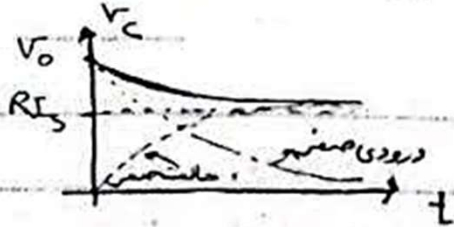
$$\boxed{\text{پاسخ در زودی صفر} + \text{پاسخ حالت صفر} = \text{پاسخ کامل}}$$

به عنوان مثال برای یک مدار R_c خواهیم داشت

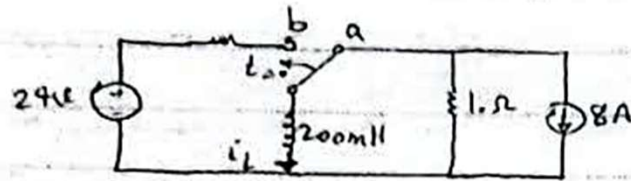
$$v_c(t) = \underbrace{v_0 e^{-t/\tau_c}}_{\text{پاسخ در زودی صفر}} + \underbrace{RI_s (1 - e^{-t/\tau_c})}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

۴- پاسخ گذرا و دائمی: با جابه جایی کردن جمله مقادیری ساده خواهیم داشت

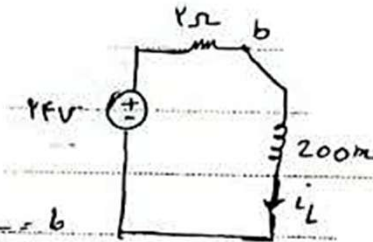
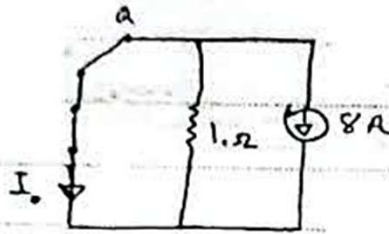
$$v_c(t) = \underbrace{(v_0 - RI_s) e^{-t/\tau_c}}_{\text{پاسخ گذرا}} + \underbrace{RI_s}_{\text{پاسخ دائمی}}$$



مثال) در شکل زیر ولتیدیت هار و وضعیت i_L آورده در $t=0$ به وضعیت B می رود مطلوبست
 محاسبه $i_L(t)$:
 الف) ولتیدیت هار و وضعیت i_L آورده در $t=0$ به وضعیت B می رود



$t < 0$: ولتیدیت هار و وضعیت i_L آورده در $t=0$ به وضعیت B می رود
 $I_0 = -1A$



$t > 0$: ولتیدیت هار و وضعیت i_L آورده در $t=0$ به وضعیت B می رود

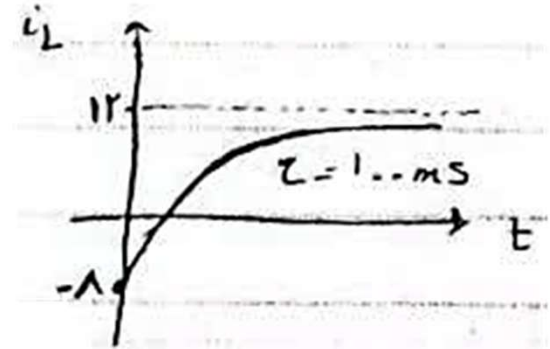
$$I_1 = \frac{L}{R} = \frac{200m}{2} = 0.1 \rightarrow \frac{1}{I_1} = 10$$

$$i_L(\infty) = \frac{24}{2} = 12A$$

۱. جابجایی مقدار مؤثر در رابطه ی کلی داریم:

$$i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)] e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$$

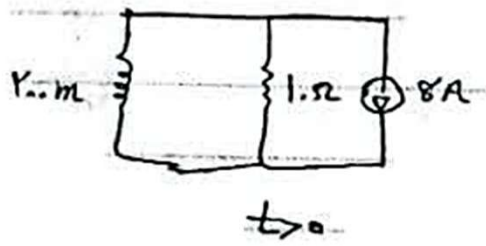
جابجایی $i_L(t) = [-8 - 12] e^{-1.0 \cdot t} + 12 = 12 - 20 e^{-1.0 \cdot t}$



ب) اگر در این مدار کلید مدت حاد در وضعیت b بوده در $t=0$ به وضعیت a مستقل شود i_L چقدر است؟

راضع است جای معادلی اولیه و نهایی قسنت. که برعکس سمت الف خواهد بود.

$i_L(0) = 12$, $i_L(\infty) = -8$



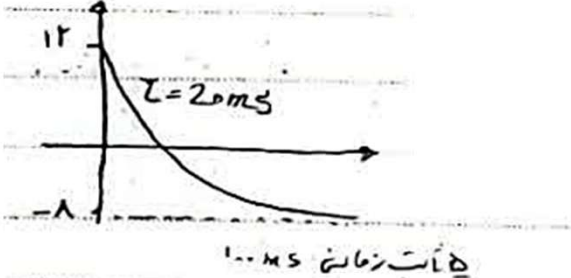
τ_2 بت زمانی سمت b برابر خواهد بود با

$$\tau_2 = \frac{L}{R_2} = \frac{200m}{1} = 20m \Rightarrow \frac{1}{\tau_2} = 50$$

اگر تغییراتی در رابطه می داریم

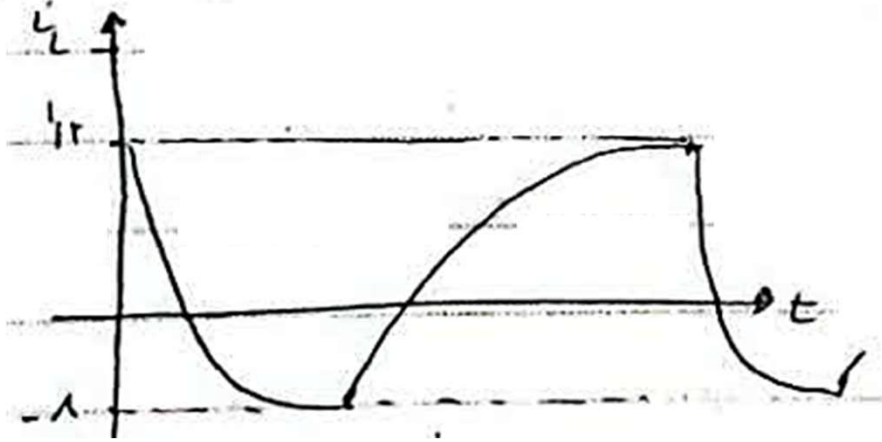
$$i_L(t) = [12 + 8] e^{-50t} - 8$$

$$= -8 + 20 e^{-50t} \quad t \geq 0$$

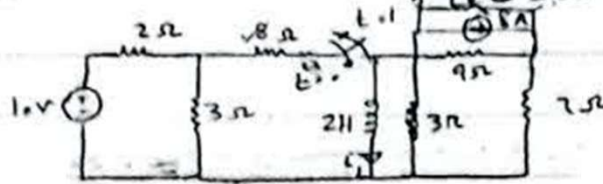


ج. اگر کسبه به طور متوالی بین نقاط a و b و اما فاصله‌ی زمایی زیاد باشد و $t_2(t)$ را رسم کنید:

چون فاصله‌ی زمایی بین کسبه زیاد است، مدار در هر مرحله به مقدارهای خود رسیده است. بنابراین



مثلاً در شکل زیر کلید بسته و باز و ط به پاره است در $t = 0$ کلید بسته شده است و در $t = 1$ هر دو کلید از هم جدا می شوند و مطلوب مقدار جریان $i(t)$ را بیابید.

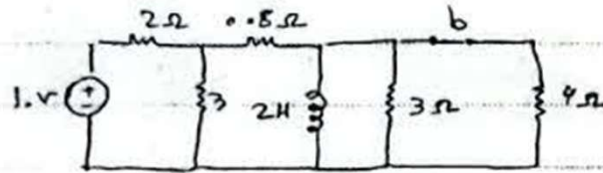


۱- $t < 0$ کلید بسته و باز

با بسته بودن کلید ط منبع ۸Ω جریان به مدارات دیگر نمی کشد و این $I_0 = 0A$

۲- $0 < t < 1$ کلید بسته و باز

با بسته بودن کلید ط منبع ۸Ω و مقاومت ۹Ω حذف می شود و این داریم:



مقاومت دیده شده اندر سر سلف را برابر است با:

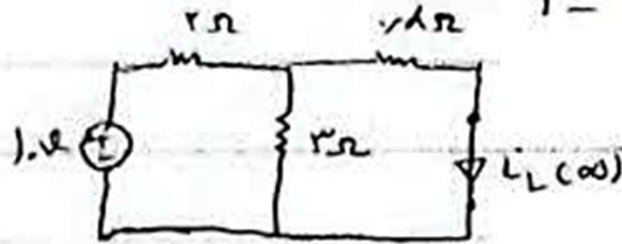
$$R_1 = [(2 \parallel 3) + 0.5] \parallel [3 \parallel 4] = 1 \Omega$$

منبع سلف را حذف می کنیم:

$$\Rightarrow I_1 = \frac{L}{R_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{1}{\tau} = 1A$$



برای محاسبه $i_L(\infty)$ اتصال کوتاه شدن سلف داریم:



$$I = \frac{10}{2 + (3//\frac{3}{8})} = 3.18 A$$

مستقیم بران: $i_L(\infty) = \frac{3}{3 + 0.375} \times 3.18 = 3 A$

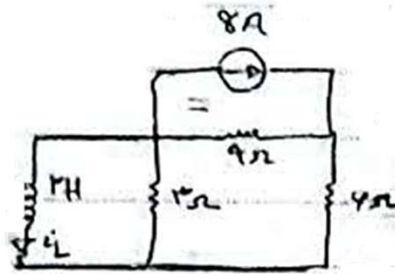
با جایگزینی در معادله می‌توانیم:

$$i_L(t) = (0 - 3)e^{-t/\tau} + 3 = 3(1 - e^{-t/\tau}) \quad \forall t < 1$$

- $t > 1$ هر دو کلید باز

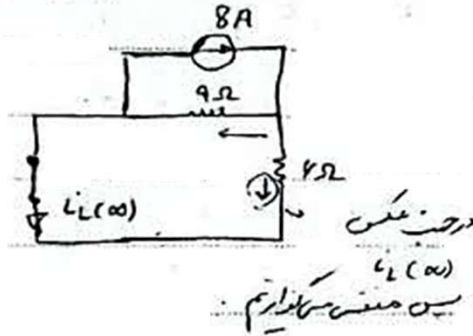
با باز شدن کلید t منبع $8A$ وارد مدار می شود بنابراین

برای سست آوردن مقدار اولیه از معادله ی میل استفاده می کنیم:



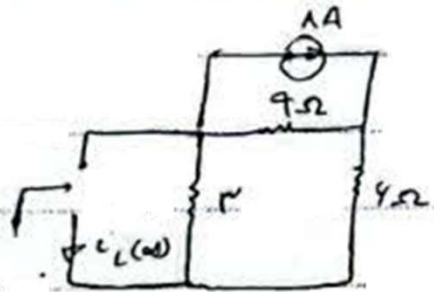
$$t = 1 \Rightarrow i_L(1) = 2(1 - e^{-\frac{1}{2}}) = 1.8A$$

برای محاسبه ی $i_L(\infty)$ اتصال کوتاه شدن منبع معادست 3Ω می شود بنابراین



$$i_L(\infty) = -\frac{9}{9+4} \times 8 = -1.8A$$

حالت دیر شده از نورس رلف برابر است!



$$R_T = (9 + 4) \parallel 3 = 2.5 \Omega$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L}{R_T} = \frac{2}{2.5} \Rightarrow \frac{1}{\tau} = 1.25$$

با تغییر در معادله می داریم
 $t \geq 1$

$$i_L(t) = [1.8 + 4.8] e^{-1.25(t-1)} - 4.8 A$$