

بسمه تعالی

آیه ۳ سوره طلاق:

وَيَرْزُقُهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ وَمَنْ يَتَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ فَهُوَ حَسْبُهُ إِنَّ اللَّهَ بَالِغُ أَمْرِهِ قَدْ جَعَلَ اللَّهُ لِكُلِّ شَيْءٍ قَدْرًا

و از جایی که گمان نبرد به او روزی عطا کند، و هر که بر خدا توکل کند خدا او را کفایت خواهد کرد که خدا امرش را نافذ و روان می‌سازد و بر هر چیز قدر و اندازه‌ای مقرر داشته است.

مدارهای منطقی

فصل سوم

حداقل سازی در سطح گیت

ساده سازی با نقشه کارنو



۱-۳ روش نقشه

پیچیدگی گیت‌های منطقی دیجیتال که یک تابع بول را پیاده‌سازی می‌کنند، مستقیماً به پیچیدگی عبارات جبری که توسط آن تابع پیاده‌سازی می‌شوند بستگی دارد. گرچه جدول درستی یک تابع نمایش منحصر به فردی دارد، اما وقتی به صورت جبری بیان شود، می‌تواند فرم‌های متفاوتی داشته باشد. عبارات بول را می‌توان همان‌طور که در بخش ۲-۴ بحث شد، به صورت جبری ساده کرد. با این وجود، این روش حداقل‌سازی به دلیل کمبود قوانین خاص در پیشگویی مرحله بعدی فرآیند دستکاری، مشکل است. روش نقشه، روالی ساده را برای ساده‌سازی توابع بول پیش پا می‌گذارد. این روش را می‌توان فرم مصور جدول درستی تصور کرد. روش نقشه را نقشه کارنو یا نقشه K هم می‌نامند.

نقشه نموداری است متشکل از مربعات که هر مربع یک مینترم از تابع را نشان می‌دهد. چون هر تابع بول را می‌توان به مجموعی از مینترم‌ها نشان داد، بنابراین نتیجه می‌شود که یک تابع بولی در نقشه را می‌توان با مربعاتی که مینترم‌های متعلق به آنها در تابع وجود دارد به صورت گرافیکی شناسایی کرد. در واقع نقشه، نمایشی عینی از همه راه‌هایی است که یک تابع ممکن است در فرم استاندارد داشته باشد. با تشخیص همه الگوهای مختلف، کاربر می‌تواند عبارات جبری مختلفی برای یک تابع بدست آورده و از میان آنها ساده‌ترین را انتخاب کند.



نقشه دو متغیره

نقشه دو متغیره در شکل ۱-۳ (الف) نشان داده شده است. در این نقشه چهار مینترم برای دو متغیر وجود دارد؛ از این رو نقشه متشکل از چهار مربع است، که هر یک متعلق به یک مینترم می باشد. نقشه (ب) برای نمایش ارتباط بین مربعات و دو متغیر x و y دوباره ترسیم شده است. 0 و 1 موجود در هر سطر و ستون مقدار متغیر را نشان می دهند. متغیر x در سطر 0 پریم دار و در سطر 1 بدون پریم است. به طور مشابه y در ستون 0 پریم دار و در ستون 1 بدون پریم می باشد.

		y	
		0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

(ب)

m_0	m_1
m_2	m_3

(الف)

شکل ۱-۳. نقشه دو متغیره

چون xy برابر m_3 است، یک 1 در داخل مربع متعلق به m_3 قرار می دهیم. به طور مشابه تابع $x+y$ در نقشه شکل ۲-۳ (ب) نشان داده شده است که در آن سه مربع با 1 علامت زده شده اند. این مربعات از میترم های تابع به دست آمده اند:

$$m_1 + m_2 + m_3 = x'y + xy' + xy = x + y$$

سه مربع از تلاقی x در سطر دوم و متغیر y در ستون دوم، که ناحیه متعلق به x یا y را پوشش می دهند، نیز بدست می آید.

		y	
		0	1
x	0		1
	1	1	1
		$x+y$ (ب)	

		y	
		0	1
x	0		
	1		1
		xy (الف)	

شکل ۲-۳. نمایش توابع در نقشه



نقشه سه متغیره

یک نقشه سه متغیره در شکل ۳-۳ مشاهده می شود. برای سه متغیر هشت مینترم وجود دارد. بنابراین نقشه از هشت مربع تشکیل یافته است. توجه کنید که مینترمها براساس ترتیب دودویی مرتب نشده اند، بلکه ترتیبشان براساس کد گری فهرست شده است.

ویژگی این ترتیب این است

که هنگام عبور از یک ستون به ستون مجاور تنها یک بیت از نظر مقدار تغییر می کند. برای نشان دادن رابطه بین مربع ها و سه متغیر نقشه، بخش (ب) با اعدادی در هر سطر و هر ستون علامت گذاری شده است. مثلاً مربع متعلق به m_5 مربوط به سطر 1 و ستون 01 است. وقتی دو عدد در کنار هم قرار گیرند عدد دودویی 101 حاصل می شود که معادل دهدهی آن عدد 5 می باشد. به طریقی دیگر هم می توان به مربع $m_5 = xy'z$ نگاه کرد به این ترتیب که بگوییم m_5 در سطر مربوط به x و ستون متعلق به $y'z$ است (ستون 01). توجه کنید که هر متغیر در چهار مربع مقدار 0 و در چهار مربع دیگر مقدار 1 را دارد. به منظور تفکیک، هر متغیر را در خانه های 1 بدون پریم و در خانه های 0 با پریم نشان می دهیم. برای سادگی، متغیر را با سمبل حرفی اش در زیر مربعاتی که بدون پریم هستند می نویسیم.

		y			
		xz			
x		00	01	11	10
	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

z
(ب)

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

(الف)

شکل ۳-۳. نقشه سه متغیره

برای رسم نقشه کارنو یک تابع کافی است مینترم هایی که تابع شامل آنها می باشد را با عدد یک در نقشه مشخص کنیم



مثال ۱-۳

تابع بولی زیر را ساده کنید.

$$F(x, y, z) = \sum(2, 3, 4, 5)$$

		yz		y	
		00	01	11	10
x	0			1	1
	1	1	1		

z

شکل ۳-۴. نقشه مثال ۱-۳. $F(x, y, z) = \sum(2, 3, 4, 5) = xy + xy'$

ابتدا یک 1 در هر مربعی که میترم تابع را نشان دهد قرار می دهیم. این کار در شکل ۳-۴ به این ترتیب انجام شده است که مربعات میترم های 010، 011، 100 و 101 با 1 علامت زده شده اند. قدم بعدی یافتن مربع های مجاور است. این کار در نقشه با زیرمربع هایی که هر یک دو عدد 1 را در بر می گیرند صورت گرفته است. زیرمربع یا مستطیل بالای سمت راست ناحیه پوشش یافته با $x'y$ را شامل می شود. این دو مربع در سطر 0 قرار دارند که با x' و نیز در دو ستون آخر با y نشان داده می شوند. به طور مشابه مستطیل پایین سمت چپ جمله ضرب xy' را نشان می دهد (سطر دوم نشان دهنده x و دو ستون چپ نیز y' است). جمع منطقی این دو جمله ضرب، عبارت ساده شده را نتیجه می دهد.

در حالت سه متغیره می توان گفت:

یک مربع نظیر یک مینترم است که با یک جمله سه متغیری نشان داده می شود.

دو مربع همجوار با یک جمله دو متغیری نمایش داده می شود.

چهار مربع همجوار با یک جمله تک متغیری نمایش داده می شود.

تمام مربع های یک نقشه (در این حالت هشت مربع) تولید تابعی می کنند که همواره یک است.

نکات مهم در انتخاب مربع های همجوار و ساده سازی آنها:

- 1) مربع هایی که در یک یا سطر یا یک ستون هستند همجوارند.
- 2) مربع هایی که در ابتدا و انتهای یک سطر یا ستون قرار دارند همجوارند.
- 3) ترکیب خانه ها باید به گونه ای باشد که مربع های همجوار انتخاب شده دارای مقدار 2^n باشد. به طور کلی در گروه های 2^n خانه ای از نقشه کارنو n متغیر باید حذف شود.



مثال ۲-۳

تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(x, y, z) = \sum(3, 4, 6, 7)$$

نقشه این تابع در شکل ۳-۵ ترسیم شده است. در این شکل ۴ مربع با ۱ علامت خورده اند که هر کدام متعلق به یک میترم است. دو مربع همجوار در ستون سوم با هم ترکیب شده اند تا جمله دو لیترال yz را به وجود آورند.

		yz		y	
		00	01	11	10
x	0			1	
	1	1		1	1
		z			

شکل ۳-۵. نقشه مثال ۲-۳. $F(x, y, z) = \sum(3, 4, 6, 7) = yz + xz'$

دو مربع باقیمانده هم براساس تعریف جدید مجاورند و در نمودار با نیم مربع ها محصور شده اند. این دو مربع، وقتی ترکیب شوند جمله دو لیترالی xz' را بدست می دهند. بنابراین تابع ساده شده به فرم زیر است.

$$F = yz + xz'$$



می‌آید تا مربعات 001 و 011 را بدهند. توجه کنید که وقتی 1 ها را در مربعات می‌گذارید، ممکن است یک 1 را که از جمله قبلی در آن قرار داده شده بیابید. این نکته برای دومین جمله، $A'B$ ، رخ می‌دهد که دو عدد 1 در مربع‌های 01 و 010 قرار دارند. مربع 011 با جمله اول، $A'C$ ، مشترک است، بنابراین تنها یک 1 در آن قرار داده می‌شود. به همین ترتیب می‌بینیم که جمله $AB'C$ متعلق به مربع 101، یعنی میترم 5 است، و جمله BC متعلق به دو مربع 011 و 111 می‌باشد. تابع جمعاً پنج میترم دارد و در نقشه شکل ۳-۷ هم با پنج عدد 1 نشان داده شده است. میترم‌هایی که مستقیماً از نقشه خوانده می‌شوند عبارتند از 1، 2، 3، 5 و 7. تابع را می‌توان به صورت جمع میترم‌ها نشان داد.

$$F(A, B, C) = \sum(1, 2, 3, 5, 7)$$

عبارت جمع حاصلضرب مفروض اولیه چندین جمله دارد. همانطور که در نقشه مشاهده می‌شود می‌توان آن را ساده کرده و عبارتی دو جمله‌ای بدست آورد.

$$F = C + A'B$$

مثال ۳-۴

تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F = A'C + A'B + AB'C + BC$$

(الف) آن را به مجموع میترم‌ها نشان دهید.

(ب) و سپس عبارت مجموع حاصلضرب حداقل را پیدا کنید.

سه جمله ضرب در عبارت دو لیترال دارند و در نقشه سه متغیره، هر یک با دو مربع نشان داده شده‌اند. دو مربع مربوط به جمله اول، $A'C$ ، در شکل ۳-۷ از تلاقی A' (اولین سطر) و C (دو ستون میانی) بدست

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0		1	1	1
	1		1	1	

$$F = A'C + A'B + AB'C + BC = C + A'B \quad \text{شکل ۳-۷. نقشه مثال ۳-۴}$$

۲-۳ نقشه چهار متغیره

نقشه توابع بول چهار متغیره در شکل ۸-۳ نشان داده شده است. در (الف) ۱۶ جمله مینترم فهرست شده و به هر یک مربعی تخصیص داده شده است. در (ب) نقشه دوباره رسم شده تا بیانگر ارتباط بین چهار متغیر باشد. سطرها و ستونها براساس کدگری شماره گذاری شده اند، و بین هر دو سطر یا ستون مجاور تنها یک رقم تغییر می کند. مینترم متعلق به هر مربع از ترکیب شماره سطر و شماره ستون آن بدست می آید. مثلاً وقتی اعداد سطر سوم (۱۱) و ستون دوم (۰۱) ترکیب شوند عدد دودویی ۱۱۰۱ حاصل می گردد، که معادل ۱۳ دهمی است. بنابراین، مربع در سطر سوم و ستون دوم مینترم m_{13} را نمایش می دهد. ساده کردن توابع بول چهار متغیره مشابه با روش به کار رفته برای توابع سه متغیره است. مربعات مجاور مربعاتی هستند که در کنار یکدیگرند. به علاوه نقشه در سطحی واقع است و لبه های بالا و پایین و چپ و راست آن نیز مجاور است تا به این ترتیب مربعات همجوار را بسازند. مثلاً m_0 و m_2

		yz		y			
		00	01	11	10		
wx	00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$	x	m_0
	01	$w'xy'z'$	$w'xyz$	$w'xyz$	$w'xyz'$		m_4
11	11	$wxy'z'$	$wxyz$	$wxyz$	$wxyz'$		m_{12}
	10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$		m_8
		z					
		(ب)					

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

(الف)

شکل ۸-۳. نقشه چهار متغیره



ترکیب مربعات همجوار به راحتی با بررسی نقشه چهار متغیره قابل تشخیص است:

یک مربع یک میترم را نمایش می دهد، و جمله آن چهار لیترالی است.

دو مربع همجوار یک جمله سه لیترالی را می سازند.

چهار مربع همجوار یک جمله دو لیترالی را نشان می دهند.

هشت مربع همجوار یک جمله یک لیترالی را نمایش می دهند.

شانزده مربع همجوار تابعی برابر 1 را تولید می کنند.

هیچ ترکیب دیگری از مربع ها نمی تواند تابع را ساده کند.

		yz		y	
		00	01	11	10
wx	00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
	01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
	11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
	10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$
		z			



مثال ۳-۵

تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(w, x, y, z) = \sum(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

چون تابع چهار متغیر دارد، باید از نقشه چهار متغیره استفاده کرد. میترم‌های لیست شده در مجموع فوق با ۱ها در نقشه شکل ۳-۹ علامت زده شده‌اند. هشت ۱ مجاور می‌توانند با هم ترکیب شده و جمله تک لیترالی y' را نتیجه دهند. سه ۱ باقیمانده در سمت راست نمی‌توانند با هم ترکیب و جمله ساده‌ای بدهند. آنها باید به صورت دو یا چهار مربع مجاور با هم ترکیب شوند. هر چقدر تعداد مربعات ترکیب شده بیشتر باشد، تعداد لیترال‌ها در جمله کمتر خواهد بود.

در این مثال دو ۱ فوقانی سمت راست با دو ۱ فوقانی در سمت چپ ترکیب شده و جمله $w'z'$ را می‌دهند. توجه داشته باشید که می‌توان یک مربع را بیش از یک بار به کار برد. حال فقط یک مربع در سطر سوم و ستون چهارم (مربع ۱۱۱۰) باقیمانده است. در عوض انتخاب این مربع به تنهایی، آن را با مربع‌هایی که قبلاً به

		yz		y	
		00	01	11	10
wx	00	1	1		1
	01	1	1		1
	11	1	1		1
	10	1	1		
		z		x	

شکل ۳-۹. نقشه مثال ۳-۵

$$F(w, x, y, z) = \sum(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14) = y' + w'z' + xz'$$

تابع زیر را ساده کنید.

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$$

ناحیه مفروش شده با این تابع شامل مربعاتی است که در شکل ۱۰-۳ با ۱ علامت زده شده است. این تابع دارای چهار متغیر بوده و همانطور که دیده می شود سه جمله سه لیترا لی و یک جمله چهار لیترا لی دارد. هر جمله سه لیترا لی در نقشه با دو مربع نمایش داده شده است. مثلاً $A'B'C'$ در مربعات 0001 و 0000 نشان داده شده است. تابع را می توان با انتخاب چهار 1 در گوشه ها و ترکیب آنها برای بدست آوردن جمله $B'D'$ ساده کرد. این عمل مجاز است زیرا وقتی نقشه را سطحی تصور کنیم که لبه های چپ و راست و لبه های پایین و بالای آن با هم مجاورند، این چهار مربع همجوار خواهند بود. دو 1 سمت چپ در سطر بالا با دو 1 در سطر پایین ترکیب می شوند تا جمله $B'C'$ حاصل شود. تنها 1 باقیمانده را به صورت دو مربع ترکیب می کنیم تا $A'CD'$ حاصل گردد. تابع ساده شده به صورت زیر خواهد بود.

$$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$

شکل ۱۰-۳. نقشه مثال ۶-۲

	CD		C	
	00	01	11	10
AB	00	1	1	1
	01			1
	11			
	10	1	1	1

D

B

A

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C' = B'D' + B'C' + A'CD'$$



۳-۳ نقشه پنج متغیره

استفاده از نقشه‌هایی که بیش از چهار متغیر دارند چندان ساده نیست. یک نقشه پنج متغیره به 32 مربع و نقشه شش متغیره به 64 مربع نیاز دارد. وقتی تعداد متغیرها زیاد شود، تعداد مربعات هم به طور بی‌رویه‌ای افزایش می‌یابند و یافتن مربعات همجوار بیش از پیش به شکل هندسی وابسته می‌گردد. یک نقشه پنج متغیره در شکل ۳-۱۲ نشان داده شده است. این نقشه، از دو نقشه چهار متغیره با متغیرهای A، B، C، D و E تشکیل یافته و متغیر A آن دو را از هم تفکیک کرده است. نقشه چهار متغیره سمت چپ 16 مربعی را نشان می‌دهد که در آن $A = 0$ است، و دیگر نقشه چهار متغیره، مربعات مربوط به $A = 1$ را نمایش می‌دهد. مینترم‌های 0 تا 15 متعلق به $A=0$ و مینترم‌های 16 تا 31 متعلق به $A=1$ است. هر نقشه چهار متغیره وقتی جداگانه بررسی شود همجواری تعریف شده قبلی خود را حفظ می‌کند. به علاوه هر مربع از نقشه $A=0$ با مربع متناظرش در مربع $A=1$ همجوار است. مثلاً مینترم 4 با مینترم 20 و مینترم 15 با 31 مجاور است. بهترین راه تجسم این قانون برای مربع‌های همجوار این است که این دو نیم نقشه را بر روی یکدیگر تصور کنیم. هر دو مربعی که روی هم قرار گیرند مجاور شناخته می‌شوند.



$A = 0$				
BC	DE		D	
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

E

C

$A = 1$				
BC	DE		D	
	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

E

C

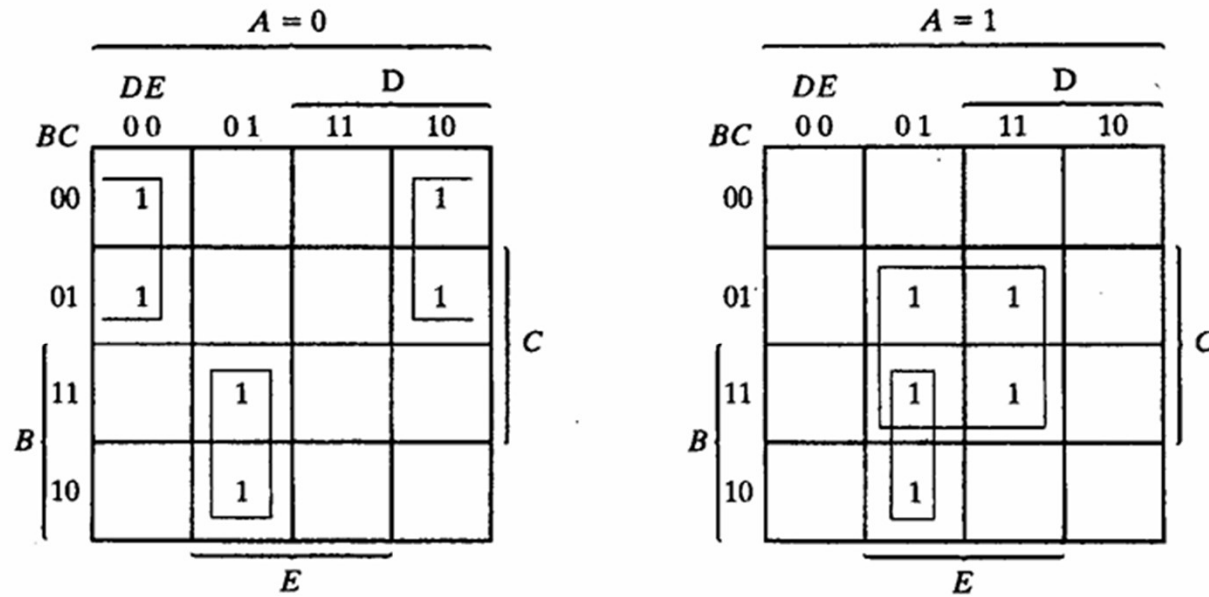
شکل ۱۲-۳. نقشه پنج متغیر



مثال ۳-۷

تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(A, B, C, D, E) = (0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$



شکل ۳-۱۳. نقشه مثال ۳-۷ $F = A'B'E' + BD'E + ACE$



۳-۴ ساده سازی با ضرب حاصل جمع ها

در تمام مثال های قبلی توابع بول حاصل از نقشه به فرم جمع حاصل ضرب ها بیان شدند. با کمی اصلاح می توان فرم ضرب حاصل جمع ها را بدست آورد.

روال تهیه یک تابع حداقل برحسب ضرب حاصل جمع ها از خواص اصلی توابع بول حاصل می گردد. 1 های واقع در مربع های نقشه نشانگر مینترم های تابع است. مینترم هایی که در تابع ذکر نشوند متمم تابع را بیانگرند. با توجه به این مطلب مشاهده می کنیم که متمم یک تابع به وسیله مربع هایی که با 1 علامت زنی نشده اند بیان می گردد. اگر در مربع های خالی 0 قرار داده و آنها را با روش مربع های همجوار ترکیب کنیم عبارت ساده شده متمم تابع یعنی F' را بدست خواهیم آورد. متمم F' به ما تابع F را باز می گرداند. به دلیل عمومیت تئوری دموگران تابع حاصل به طور خودکار به صورت ضرب حاصل جمع هاست.



مثال ۸-۳

تابع بولی زیر را (الف) به صورت جمع حاصلضربها، (ب) ضرب حاصل جمعها ساده کنید.

$$F(A, B, C, D) = \sum(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

۱های موجود در نقشه شکل ۳-۱۴ همه میترمهای تابع را نمایش می دهند. مربع هایی که با ۰ علامت زده شده اند میترمهای غایب در F را نشان می دهند، بنابراین متمم F را بیانگر هستند. ترکیب مربعات حاوی ۱ها تابع ساده شده را به صورت جمع حاصلضربها بدست می دهد:

$$F = B'D' + B'C' + A'C'D \quad (\text{الف})$$

اگر مربعات حاوی ۰ها را ترکیب کنیم، تابع متمم ساده شده بدست خواهد آمد:

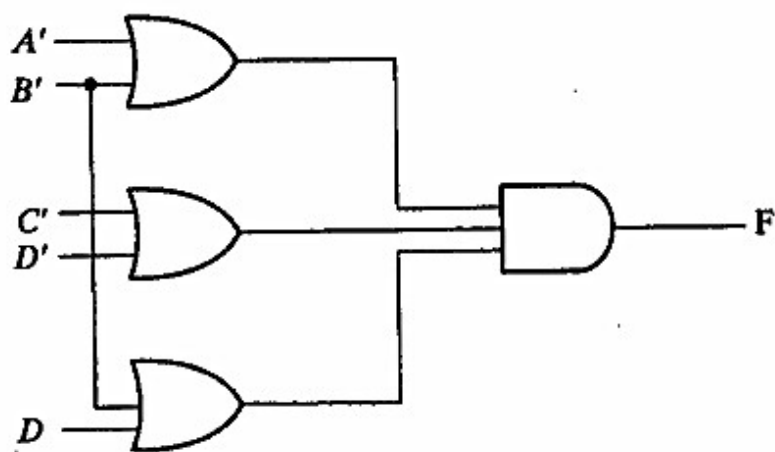
$$F' = AB + CD + BD'$$

با اعمال تئوری دمورگان (استفاده از دوگان و متمم کردن هر متغیر طبق آنچه در بخش ۲-۴ دیدیم) تابع ساده شده را به صورت ضرب حاصل جمعها بدست می آوریم:

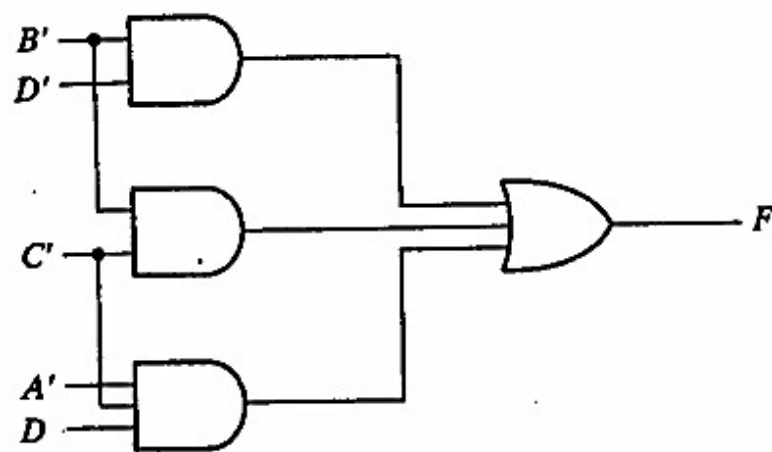
$$F = (A' + B')(C' + D')(B' + D) \quad (\text{ب})$$



		CD		C	
AB		00	01	11	10
		1	1	0	1
A	01	0	1	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	1



$$F = (A' + B')(C' + D')(B' + D) \quad (\text{ب})$$



$$F = B'D' + B'C' + A'C'D \quad (\text{الف})$$

شکل ۱۵-۳. پیاده‌سازی با گیت تابع مثال ۸-۲



جدول ۲-۳. جدول درستی تابع f

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

		yz		y	
		00	01	11	10
x	0	0	1	1	0
	1	1	0	0	1
		z			

شکل ۱۶-۳. نقشه برای تابع جدول (۲-۳)

توجه نمایید. این تابع به صورت جمع مینترمها چنین بیان می شود:

$$F(x, y, z) = \sum(1, 3, 4, 6)$$

در ضرب ماکسترمها تابع به صورت زیر است:

$$F(x, y, z) = \prod(0, 2, 5, 7)$$

به بیان دیگر، 1های تابع، مینترمها را نشان می دهند و 0های آن بیانگر جملات ماکسترم هستند. نقشه این تابع در شکل ۱۶-۳ دیده می شود. برای ساده کردن این تابع، در مربع مربوط به هر جمله مینترم که تابع به ازاء آن، مقدار 1 دارد، عدد 1 گذاشته و بقیه مربعها را با 0 پر می کنیم. از طرف دیگر اگر تابع به فرم ضرب ماکسترمها داده شده باشد در ابتدا در مربعاتی که جملات آن در تابع است 0 قرار می دهیم و بقیه مربعها با 1 پر می شوند. سپس تابع می تواند به یکی از فرمهای استاندارد ساده شود. برای جمع حاصلضربها، 1ها را با هم ترکیب می کنیم و خواهیم داشت:

$$F = x'z + xz'$$

برای ضرب حاصل جمعها، 0ها را با هم ترکیب می کنیم تا مینترم تابع ساده شده به صورت زیر حاصل شود:

$$F' = xz + x'z'$$

که نشان می دهد تابع XOR مینترم تابع هم ارزی (XNOR) است (بخش ۶-۲). با مینترمگیری مجدد از F' تابع ساده شده را به ضرب حاصل جمعها بدست خواهیم آورد.

$$F = (x' + z')(x + z)$$

برای وارد کردن یک تابع در یک نقشه که برحسب ضرب حاصل جمعها بیان شده است، می باید مینترم تابع را بدست آورد و در آن مربعهای مربوطه را با 0 پر کرد. مثلاً تابع

$$F = (A' + B' + C')(B + D)$$

را می توان با مینترمگیری از آن وارد جدول کرد.

$$F' = ABC + B'D'$$

آنگاه مربعهایی که مینترمهای F' را تشکیل می دهند با 0 پر می کنیم. بقیه مربعها را با 1 پر می نماییم.



۳-۵ حالات بی‌اهمیت

توابعی که در ازاء ترکیبی از ورودی‌ها خروجی‌های

نامشخص دارند، تابع غیرکامل نامیده می‌شود. در بسیاری از کاربردها، توجهی به مقدار منتسب به تابع در ازاء مینترم‌های نامعین نخواهیم داشت. به این دلیل مرسوم است که همه مینترم‌های نامشخص در تابع را حالات بی‌اهمیت بخوانیم. از حالات بی‌اهمیت می‌توان برای ساده‌سازی بیشتر عبارت بول در یک نقشه استفاده کرد.

باید توجه داشت که یک مینترم بی‌اهمیت ترکیبی از متغیرهاست که مقدار منطقی آن نامشخص است. به این دلیل نمی‌توان یک حالت بی‌اهمیت را در نقشه با 1 نشان داد زیرا این عمل به این معنی است که تابع برای ترکیب خاص از ورودیها همواره برابر 1 می‌باشد. به طور مشابه گذاشتن 0 در مربع‌های نقشه به معنی 0 بودن همیشگی تابع در آن حالت است. برای تفکیک حالت بی‌اهمیت از 1ها و 0ها از X استفاده می‌کنیم. بنابراین هر X در داخل یک مربع از نقشه به این معنی است که تخصیص 1 یا 0 به تابع به ازاء یک مینترم خاص فاقد اهمیت است.

وقتی مربع‌های مجاور انتخاب می‌گردند تا تابع در جدول ساده شود، مینترم‌های بی‌اهمیت با این ایده که ساده‌ترین فرم برای تابع بدست آید، برابر 1 یا 0 فرض می‌شوند. در ساده‌سازی تابع می‌توانیم با توجه به ساده‌ترین فرم ممکن برای تابع، به حالات بی‌اهمیت 0 یا 1 دهیم.



مثال ۹-۳

تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(w, x, y, z) = \sum(1, 3, 7, 11, 15)$$

که حالات بی اهمیت زیر را داراست.

$$d(w, x, y, z) = \sum(0, 2, 5)$$

		yz		y	
		00	01	11	10
w	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

$$F = yz + w'z \quad (\text{ب})$$

		yz		y	
		00	01	11	10
w	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

$$F = yz + w'x' \quad (\text{الف})$$

شکل ۱۷-۳. مثال با حالات بی اهمیت

مثال قبل نشان داد که مینترم‌های بی‌اهمیت در نقشه در ابتدا با X ها علامت خورده‌اند و فرض می‌شود که بتوانند 0 و یا 1 بشوند. انتخاب 0 و یا 1 به روش ساده کردن تابع غیرکامل وابسته است. پس از انتخاب، تابع ساده شده حاصل متشکل از مجموع مینترم‌ها است و در آنها مینترم‌هایی که در آغاز نامعلوم بوده ولی بعد به عنوان 1 انتخاب شده‌اند نیز وجود خواهند داشت. دو عبارت ساده شده حاصل در مثال ۹-۳ را در نظر بگیرید:

$$F(w, x, y, z) = yz + w'x' = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7, 11, 15)$$

$$F(w, x, y, z) = yz + w'z = \Sigma(1, 3, 5, 7, 11, 15)$$

هر دو عبارت شامل مینترم‌های 1، 3، 7، 11 و 15 می‌باشند که تابع F را برابر 1 می‌کنند. مینترم‌های بی‌اهمیت در آن دو به طور متفاوتی به کار گرفته شده‌اند و در اولین عبارت مینترم‌های 0 و 2 برابر 1 گرفته شده و مینترم 5 با انتخاب 0 حذف شده است. در دومین عبارت مینترم 5 برابر 1 و مینترم‌های 0 و 2 با مقدار 0 جایگزین شده‌اند. دو عبارت توابعی را نشان می‌دهند که فرم جبری متفاوتی دارند. هر دو مینترم‌های مشخص شده را می‌پوشانند ولی هر یک مینترم‌های بی‌اهمیت متفاوتی را پوشش می‌دهند. مادامی که تابع مشخص شده غیرکامل است، هر دو عبارت قابل قبول‌اند زیرا تنها اختلاف در مقدار F مینترم‌های بی‌اهمیت می‌باشند.

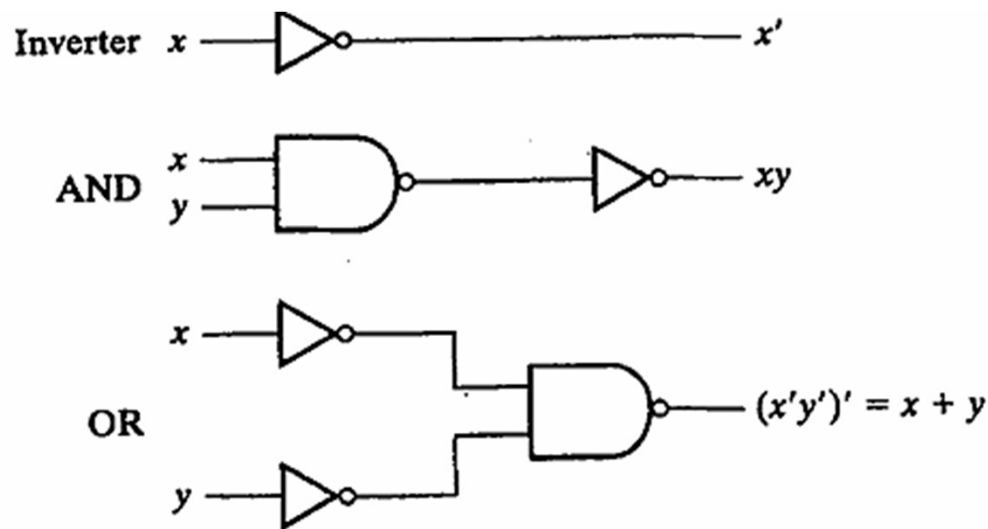


۳-۶ پیاده‌سازی با NAND و NOR

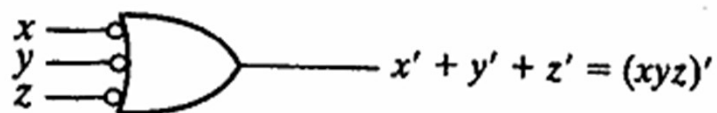
مدارهای دیجیتال اغلب به جای AND و OR با گیت‌های NAND و NOR ساخته می‌شوند. ساختن گیت‌های NAND و NOR با اجزاء الکترونیکی ساده‌تر بوده و به عنوان گیت‌های پایه در تمام خانواده‌های IC های دیجیتال به کار می‌روند. به دلیل مزیت گیت‌های NAND و NOR در طراحی مدارهای دیجیتال، قواعد و روال‌هایی برای تبدیل توابع بول بیان شده برحسب AND ، OR و NOT به نمودارهای منطقی معادل برحسب NAND و NOR بوجود آمده است.

مدارهای NAND

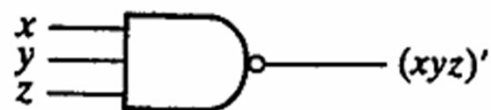
گیت NAND را یک گیت یونیورسال می‌گویند زیرا هر سیستم دیجیتالی را می‌توان با آن پیاده‌سازی کرد. برای این که نشان دهیم هر تابع بولی قابل پیاده‌سازی با گیت‌های NAND می‌باشد، کافی است فقط نشان دهیم که اعمال منطقی AND ، OR و NOT را می‌توان با NAND پیاده‌سازی کرد. این کار در شکل ۳-۱۸ نشان داده شده است. عمل متمم از یک گیت NAND یک ورودی که دقیقاً مثل NOT عمل می‌کند حاصل می‌گردد. عمل AND نیاز به دو گیت NAND دارد. اولی عمل NAND و دومی عمل NOT را انجام می‌دهد. عمل OR از طریق یک گیت NAND و دو NOT در هر ورودی حاصل می‌شود.



شکل ۱۸-۳. عملیات منطقی با گیت‌های NAND



Invert-OR (ب)



AND-invert (الف)

شکل ۱۹-۳. دو سمبل گرافیکی برای گیت NAND



قاعده پیاده سازی با گیت NAND (پیاده سازی دوطبقه):

- 1- تابع باید ساده شده و به صورت مجموع حاصل ضرب ها تبدیل گردد.
- 2- برای هر جمله حاصل ضرب که حداقل شامل دو متغیر باشد یک گیت NAND کشیده می شود و به ورودی های گیت NAND متغیرهای جمله وارد می شوند که این گروه گیت های طبقه اول را تشکیل می دهند.
- 3- در طبقه دوم یک گیت NAND کشیده می شود که ورودی های آن از خروجی گیت های طبقه اول بدست می آید.
- 4- یک جمله با یک متغیر در طبقه اول نیاز به یک معکوس کننده دارد.

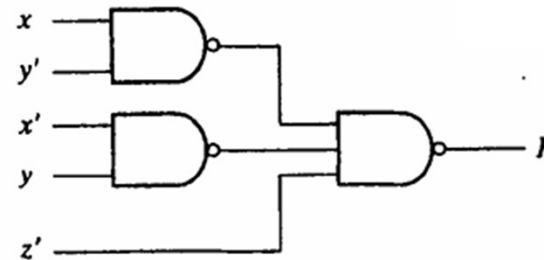
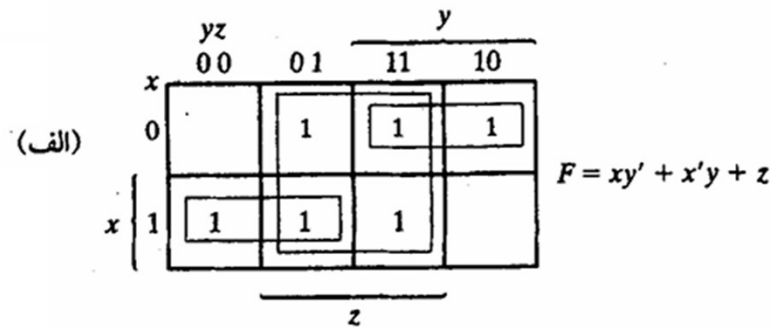


تابع بول زیر را با گیت‌های NAND پیاده کنید.

$$F(x, y, z) = (1, 2, 3, 4, 5, 7)$$

اولین قدم در تبدیل، ساده‌سازی تابع در جمع حاصلضرب‌هاست. این کار به کمک نقشه شکل ۲۱-۳ (الف) انجام شده است و تابع حاصل به صورت زیر است.

$$F = xy' + x'y + z$$

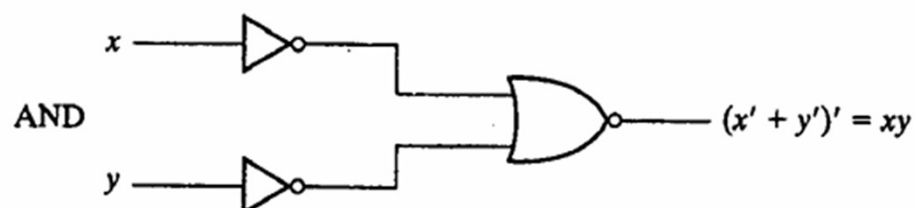
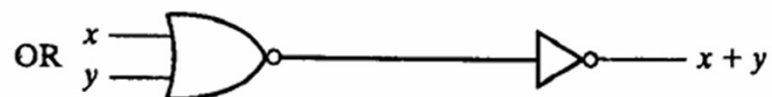
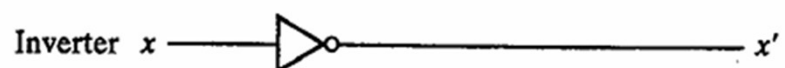




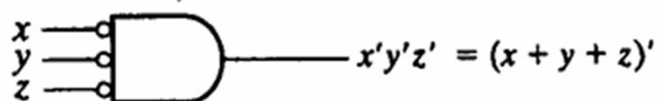
پیاده‌سازی NOR

عمل NOR دوگان NAND است. بنابراین تمام روال‌ها و قوانین منطق NOR دوگان روال‌های متناظر و قوانین حاصل در منطق NAND هستند. NOR، گیت یونیورسال دیگری است که برای پیاده‌سازی هر تابع بول به کار می‌رود. پیاده‌سازی اعمال AND، OR و NOT با گیت‌های NOR در شکل ۲۴-۳ ملاحظه می‌گردد. عمل متمم، با گیت NOR یک ورودی حاصل شده و عیناً مثل وارونگر عمل می‌کند. عمل OR نیاز به دو گیت NOR و عمل AND از یک گیت NOR که در هر ورودی‌اش یک وارونگر دارد حاصل می‌شود.

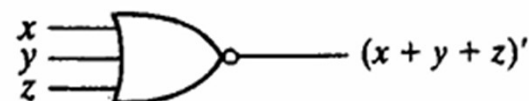
دو سمبل گرافیکی برای علائم مخلوط در شکل ۲۵-۳ دیده می‌شود. سمبل OR-invert عمل NOR را با یک OR و به دنبال آن یک متمم تعریف می‌کند. هر دو سمبل عمل NOR یکسانی را به نمایش می‌گذارند و از نظر منطقی با توجه به تئوری دمورگان یکی هستند.



شکل ۲۴-۳. عملیات منطقی با گیت‌های NOR



Invert-AND (ب)



OR-invert (الف)

شکل ۲۵-۳. دو سمبل گرافیکی برای گیت NOR

قاعده پیاده سازی با گیت NOR (پیاده سازی دوطبقه):

تابع باید ساده شده و به صورت حاصل ضرب مجموع ساده گردد.

برای هر جمله حاصل ضرب که حداقل شامل دو متغیر باشد یک گیت NOR کشیده می شود و به ورودی های گیت NOR متغیرهای جمله وارد می شوند که این گروه گیت های طبقه اول را تشکیل می دهند.

در طبقه دوم یک گیت NOR کشیده می شود که ورودی های آن از خروجی گیت های طبقه اول بدست می آید.

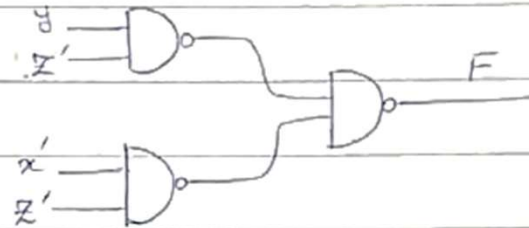
یک جمله با یک متغیر در طبقه اول نیاز به یک معکوس کننده دارد.



مثال) تابع زیر را با بلیت NAND پیاده سازی کنید.

$$F(x, y, z) = \sum (0, 2, 4)$$

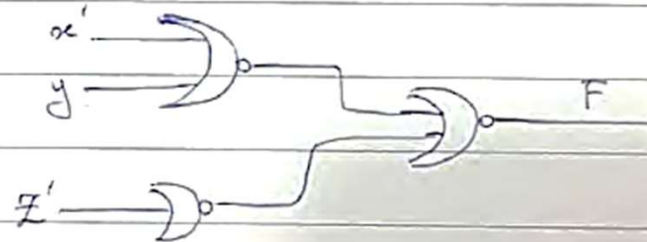
$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1



$$F = yz' + x'z'$$

به عنوان مثال اگر بخواهیم مثال قبل را با بلیت NOR پیاده سازی کنیم داریم:

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1



$$F' = z + xy'$$

$$(F')' = z' \cdot (x' + y)$$

$$F = z' \cdot (x' + y)$$